Racine cubique d'une matrice

Introduction

Dans ce problème, on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$. On dit qu'une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ admet une racine cubique s'il existe $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $A = B^3$. Dans ce cas, on dit que B est une racine cubique de A.

L'objectif de ce problème est d'étudier quelques propriétés des racines cubiques d'une matrice.

I. Étude d'un exemple

Dans cette partie, on considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 4 & -12 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}).$$

Nous allons déterminer toutes les racines cubiques de la matrice A.

1. Justifier qu'il existe une matrice inversible $P \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$, qu'il n'est pas nécessaire de déterminer explicitement, telle que $A = PDP^{-1}$ avec

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}).$$

2. Montrer qu'une matrice $B \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ est une racine cubique de A si et seulement si $\Delta = P^{-1}BP$ est une racine cubique de D.

3. Soit $\Delta \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ une racine cubique de D. Montrer que les matrices D et Δ commutent, puis en déduire que la matrice Δ est diagonale.

4. Déterminer l'ensemble des racines cubiques de D, puis l'ensemble des racines cubiques de A. On pourra se contenter de décrire ce dernier ensemble en fonction de P et de Δ.

II. Dans un plan euclidien

Dans cette partie, on considère un plan euclidien orienté E muni d'une base orthonormée directe $\mathscr{B}$. On fixe également un réel $\theta \in \mathbb{R}$ et on note

$$M = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}).$$

1. Quelle est la nature de l'endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$ dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est M ?

2. En déduire une racine cubique de la matrice M.

3. Soit $N \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ une matrice orthogonale de déterminant -1. Montrer que N admet une racine cubique.

III. Racines cubiques et diagonalisation

Dans toute cette partie, on considère une matrice diagonalisable $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On note $\lambda_1, \dots, \lambda_d \in \mathbb{R}$ les valeurs propres **deux à deux distinctes** de la matrice A.

A. Existence d'une racine cubique polynomiale

1. Soient $\lambda \in \mathbb{R}$ et $p \in \mathbb{N}^*$. Déterminer une racine cubique de la matrice

$$H_p(\lambda) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_p(\mathbb{R}).$$

2. Déduire de la question précédente que la matrice A admet une racine cubique. On pourra remarquer que A est semblable à une matrice diagonale par blocs où les blocs sur la diagonale sont de la forme $H_p(\lambda)$ avec $(p, \lambda) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{R}$.

B. Réduction d'une racine cubique

Dans cette sous-partie, on suppose de plus que la matrice A est inversible et on considère le polynôme

$$Q(X) = \prod_{k=1}^{d} \left(X^3 - \lambda_k\right).$$

3. Montrer que les nombres $\lambda_1, \dots, \lambda_d$ sont non nuls.

4. Soit $\lambda \in \mathbb{C}^*$ que l'on écrit sous la forme $\lambda = \rho e^{i\theta}$ avec $\rho > 0$ et $\theta \in \mathbb{R}$. Montrer que l'équation $z^3 = \lambda$ d'inconnue $z \in \mathbb{C}$ admet exactement trois solutions.

5. En déduire que le polynôme Q est scindé à racines simples sur $\mathbb{C}$.

6. Déduire des questions précédentes que si B est une racine cubique de A, alors la matrice B est diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

Fin