Les polynômes de Laguerre

Introduction

L'objectif de ce problème est d'étudier la suite des polynômes de Laguerre que nous construirons dans la seconde partie. Nous étudierons ensuite quelques-unes de leurs propriétés.

I. Produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$

Pour tout $(P,Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$, on note

$$\varphi(P,Q) = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

1. Soit $(P,Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$. Montrer que l'intégrale définissant $\varphi(P,Q)$ est convergente.

2. Montrer que l'application $\varphi : \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}_n[X] \to \mathbb{R}$ est un produit scalaire.

Dans tout le reste du problème, on note $(P \mid Q) = \varphi(P,Q)$ le produit scalaire de deux polynômes $P \in \mathbb{R}_n[X]$ et $Q \in \mathbb{R}_n[X]$.

II. Construction des polynômes de Laguerre

On considère l'application α définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par $\alpha : P \mapsto XP'' + (1-X)P'$.

1. Montrer que α est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Écrire la matrice de α dans la base $\left(1, X, \ldots, X^n\right)$.

3. En déduire que α est diagonalisable et que $\mathrm{Sp}(\alpha) = \left\{-k \mid k \in [\![0,n]\!]\right\}$.

4. On fixe un entier $k \in [\![0,n]\!]$.

- **a)** Quelle est la dimension de $\mathrm{Ker}\left(\alpha + k\mathrm{Id}_{\mathbb{R}_n[X]}\right)$?
- **b)** En déduire qu'il existe un unique polynôme $L_k \in \mathbb{R}_n[X]$, de coefficient dominant égal à 1, vérifiant $\alpha(L_k) = -\,kL_k$.
- **c)** Justifier que L_k est de degré k.
- **d)** Déterminer L_0 et L_1. Vérifier que $L_2 = X^2 - 4X + 2$.

III. Orthogonalité des polynômes de Laguerre

Les éléments $L_0, \ldots, L_n$ construits dans la partie précédente sont appelés les polynômes de Laguerre.

1. On fixe un couple $(P,Q) \in \mathbb{R}_n[X]^2$.

- **a)** Montrer que $(\alpha(P) \mid Q) = -\displaystyle\int_0^{+\infty} tP'(t)Q'(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.
- **b)** En déduire que $(\alpha(P) \mid Q) = (P \mid \alpha(Q))$.

2. Montrer que la famille $(L_0, \ldots, L_n)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_n[X]$.

3. Montrer que $(P \mid L_n) = 0$ pour tout $P \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$.

IV. Racines des polynômes de Laguerre

Dans cette partie, on démontre que le polynôme L_n admet n racines réelles distinctes.

On note $x_1,\dots,x_r$ les racines réelles de L_n dont l'ordre de multiplicité est impair. On raisonne par l'absurde en supposant que L_n n'admet pas n racines réelles distinctes, ce qui implique que $r<n$. En décomposant L_n dans $\mathbb{R}[X]$, on en déduit qu'il existe $s\in\mathbb{N}^*$ et $(\alpha_1,\dots,\alpha_s,\beta_1,\dots,\beta_s)\in\mathbb{R}^{2s}$ tels que

$$L_n(X)=D(X)\prod_{\ell=1}^{s}\left((X-\alpha_\ell)^2+\beta_\ell^2\right)\quad\text{avec}\quad D(X)=\prod_{k=1}^{r}(X-x_k).$$

1. Montrer que la fonction $t\mapsto D(t)L_n(t)$ est positive sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que $(D\mid L_n)=0$.

3. Conclure.

V. Méthode de quadrature de Gauss-Laguerre

D'après la partie précédente, les racines $x_1,\dots,x_n$ du polynôme L_n sont réelles et deux à deux distinctes.

1. Pour tout $k\in[\![1,n]\!]$, on définit l'application linéaire $\varphi_k:\mathbb{R}_{n-1}[X]\to\mathbb{R}$ par $\varphi_k:P\mapsto P(x_k)$.

- **a)** Montrer que $(\varphi_1,\dots,\varphi_n)$ est une famille libre de $\mathscr{L}(\mathbb{R}_{n-1}[X],\mathbb{R})$.
- **b)** Montrer que $(\varphi_1,\dots,\varphi_n)$ est une base de $\mathscr{L}(\mathbb{R}_{n-1}[X],\mathbb{R})$.
- **c)** En déduire qu'il existe un unique $(\lambda_1,\dots,\lambda_n)\in\mathbb{R}^n$ tel que

$$\forall P\in\mathbb{R}_{n-1}[X],\quad \int_0^{+\infty}P(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t=\sum_{k=1}^{n}\lambda_kP(x_k).$$

2. Nous allons établir que la formule précédente reste valable pour tout polynôme de $\mathbb{R}_{2n-1}[X]$. On fixe un polynôme $P\in\mathbb{R}_{2n-1}[X]$.

- **a)** Montrer qu'il existe un unique couple $(Q,R)\in\mathbb{R}_{n-1}[X]\times\mathbb{R}_{n-1}[X]$ tel que $P=L_nQ+R$.
- **b)** En utilisant la question **III.3**, montrer que

$$\int_0^{+\infty}P(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t=\int_0^{+\infty}R(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

- **c)** Conclure que l'on a la relation

$$\forall P\in\mathbb{R}_{2n-1}[X],\quad \int_0^{+\infty}P(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t=\sum_{k=1}^{n}\lambda_kP(x_k).$$

3. Exhiber un polynôme $P\in\mathbb{R}_{2n}[X]$ tel que

$$\int_0^{+\infty}P(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t\neq\sum_{k=1}^{n}\lambda_kP(x_k).$$

Fin