Les polynômes de Hermite

Introduction

On définit la suite des polynômes de Hermite dans $\mathbb{R}[X]$ par $H_0 = 1$ et la relation de récurrence

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad H_{n+1} = 2XH_n - H_n'.$$

L'objectif de ce problème est d'établir quelques propriétés de cette famille de polynômes.

I. Préliminaires

A. Un produit scalaire sur l'espace des polynômes

Dans cette sous-partie, on introduit un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la fonction $t \mapsto t^n e^{-t^2}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$, puis en déduire que cette fonction est intégrable sur $\mathbb{R}$.

2. En déduire pour tout polynôme $R \in \mathbb{R}[X]$ que la fonction $t \mapsto R(t)e^{-t^2}$ est intégrable sur $\mathbb{R}$.

On déduit de la question précédente que l'on peut définir l'application $\varphi : \mathbb{R}[X]^2 \to \mathbb{R}$ par

$$\forall (P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2, \quad \varphi(P, Q) = \int_{-\infty}^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t^2}\,dt.$$

3. Montrer que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

B. Calcul de l'intégrale de Gauss

Dans cette sous-partie, on détermine la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$ dont on a prouvé la convergence dans la sous-partie précédente.
On considère les fonctions $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $v : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définies pour tout $x \in \mathbb{R}$ par

$$u(x) = \int_0^x e^{-t^2}\,dt \quad \text{et} \quad v(x) = \int_0^1 \frac{e^{-(1+t^2)x^2}}{1+t^2}\,dt.$$

4. Justifier que u est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et donner une expression de sa dérivée.

5. Justifier que v est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et donner une expression de sa dérivée.

6. Montrer que la fonction $x \mapsto u(x)^2 + v(x)$ est constante sur $\mathbb{R}$, puis que sa valeur est $\dfrac{\pi}{4}$.

7. En déduire que la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2}\,dt$ est $\sqrt{\pi}$.

II. Quelques propriétés des polynômes de Hermite

Dans cette partie, on établit quelques propriétés sur la famille des polynômes de Hermite. On rappelle que la suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est définie dans la présentation générale de l'exercice.
On considère la fonction $f : x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2}$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, montrer que H_n est de degré n et que son coefficient dominant est 2^n.

2. Montrer pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$ qu'on a $f^{(n)}(x) = (-1)^n H_n(x) f(x)$.

3. En remarquant que f est une solution de l'équation différentielle $y' + 2xy = 0$, montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad H_{n+2} - 2XH_{n+1} + 2(n+1)H_n = 0.$$

On rappelle que le produit scalaire φ sur $\mathbb{R}[X]$ est défini dans la sous-partie **I.A**.

4. Soit $(p,q) \in \mathbb{N}^2$ avec $p \leqslant q$. Montrer pour tout entier $k \in [\![0,q]\!]$ que

$$\varphi(H_p, H_q) = (-1)^{q-k} \int_{-\infty}^{+\infty} H_p^{(k)}(t) f^{(q-k)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

5. Soit $d \in \mathbb{N}$. Montrer que la famille $(H_0, \ldots, H_d)$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}_d[X]$.

6. Pour tout entier $p \in \mathbb{N}$, calculer la norme du polynôme H_p.

III. Série génératrice exponentielle des polynômes de Hermite

Dans cette partie, on considère un nombre $x \in \mathbb{R}$.

A. Expression de la série génératrice

L'objectif de cette première sous-partie est de démontrer que la série entière $\sum_{n\geqslant 0} \frac{H_n(x)}{n!} z^n$ de la variable complexe z admet un rayon de convergence infini et on calcule sa somme.

1. Donner les développements en série entière des fonctions $z \mapsto \exp(2xz)$ et $z \mapsto \exp\left(-z^2\right)$ sur $\mathbb{C}$ en précisant leur rayon de convergence respectif.

2. Montrer qu'il existe une suite de nombres complexes $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$, qu'on ne cherchera pas à déterminer explicitement, telle que la série entière $\sum_{n\geqslant 0} c_n z^n$ ait un rayon de convergence infini et que

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \exp\left(-(x-z)^2\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n.$$

En considérant la fonction $f : t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}$ introduite dans la **partie II**, on déduit du résultat de la question ci-dessus qu'on a l'égalité

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f(x-t) = \sum_{n=0}^{+\infty} c_n t^n.$$

3. En utilisant la relation ci-dessus et la question **II.2**, en déduire que la série entière $\sum_{n\geqslant 0} \frac{H_n(x)}{n!} z^n$ admet un rayon de convergence infini et que

$$\forall z \in \mathbb{C}, \quad \exp\left(2xz - z^2\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{H_n(x)}{n!} z^n.$$

B. Expression intégrale des polynômes de Hermite

Dans cette seconde sous-partie, on exploite les résultats de la sous-partie précédente afin d'établir une expression intégrale pour les polynômes de Hermite.
On considère un entier $p \in \mathbb{N}$ et la fonction $G_x : z \mapsto \exp\left(2xz - z^2\right)$. On définit également pour tout $n \in \mathbb{N}$ la fonction $g_n : \theta \mapsto \dfrac{H_n(x)}{n!} \mathrm{e}^{\mathrm{i}(n-p)\theta}$.

4. Montrer que la série $\sum\limits_{n \geqslant 0} g_n$ converge normalement sur l'intervalle $[0, 2\pi]$.

5. Montrer qu'on a la relation

$$H_p(x) = \frac{p!}{2\pi} \int_0^{2\pi} G_x\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}\right) \mathrm{e}^{-\mathrm{i}p\theta}\, \mathrm{d}\theta.$$

Fin