Les polynômes de Bernoulli et la fonction ζ

Introduction

L'objectif principal de ce problème est de déterminer une expression des valeurs aux entiers strictement positifs pairs de la fonction $\zeta :]1,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in]1,+\infty[, \quad \zeta(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^x}.$$

Cette dernière intervient de manière centrale dans de nombreux domaines des mathématiques. Pour calculer les valeurs de ζ qui nous intéressent dans ce problème, nous commencerons par introduire et étudier les polynômes de Bernoulli.

I. Les polynômes de Bernoulli

Pour définir les polynômes de Bernoulli, on commence par montrer un résultat intermédiaire.

1. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Montrer qu'il existe un unique polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant

$$Q' = P \quad \text{et} \quad \int_0^1 Q(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

On en déduit que l'on peut définir la suite des polynômes de Bernoulli $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $B_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad B'_{n+1} = (n+1)B_n \quad \text{et} \quad \int_0^1 B_{n+1}(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

2. Calculer les polynômes B_1 et B_2.

3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, le polynôme B_n est de degré n.

4. Montrer que $B_n(1) = B_n(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$.

5. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $B_n(1-X) = (-1)^n B_n(X)$.

6. Montrer que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$, on a

$$B_n^{(k)} = \frac{n!}{(n-k)!} B_{n-k}.$$

7. En déduire avec le formule de Taylor pour un polynôme que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad B_n(X) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_{n-k}(0) X^k.$$

II. Les nombres de Bernoulli

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit le n-ième nombre de Bernoulli par $b_n = B_n(0)$.

1. En utilisant les questions **I.4** et **I.5**, montrer que $b_{2p+1} = 0$ pour tout $p \in \mathbb{N}^*$.
2. En utilisant les questions **I.4** et **I.7**, montrer que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad b_{n+1} = -\frac{1}{n+2} \sum_{k=0}^{n} \binom{n+2}{k} b_k.$$

3. Montrer que l'on a $b_0 = 1, \; b_1 = -\dfrac{1}{2}, \; b_2 = \dfrac{1}{6}, \; b_4 = -\dfrac{1}{30}$ et $b_6 = \dfrac{1}{42}$.

III. Valeurs de la fonction ζ aux entiers pairs

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $\tilde{B}_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ l'application 1-périodique telle que

$$\forall t \in [0,1[, \quad \tilde{B}_n(t) = B_n(t).$$

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, on désigne par $(a_k(\tilde{B}_n))_{k\in\mathbb{N}}$ et $(b_k(\tilde{B}_n))_{k\in\mathbb{N}^*}$ les coefficients de Fourier de la fonction 1-périodique $\tilde{B}_n$. Dans la suite, on considère un entier $p \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que $\tilde{B}_{2p}(-x) = \tilde{B}_{2p}(x)$ pour tout $x \in [0,1[$. En déduire que la fonction $\tilde{B}_{2p}$ est paire.
2. Montrer que $a_0(\tilde{B}_{2p}) = 0$.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$a_n(\tilde{B}_{2p+2}) = -\frac{(2p+2)(2p+1)}{(2n\pi)^2} a_n(\tilde{B}_{2p}).$$

4. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$a_n(\tilde{B}_{2p}) = \frac{2(-1)^{p+1}(2p)!}{(2n\pi)^{2p}}.$$

5. Déduire des questions précédentes que l'on a

$$\zeta(2p) = \frac{(-1)^{p+1} b_{2p} (2\pi)^{2p}}{2(2p)!}.$$

6. Calculer explicitement les nombres $\zeta(2)$, $\zeta(4)$ et $\zeta(6)$.

IV. Un équivalent pour les nombres de Bernoulli d'indice pair

Dans cette dernière partie, on détermine un équivalent de la suite $(b_{2p})_{p\in\mathbb{N}}$.

1. Justifier que pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ et tout $x \in]1,+\infty[$, on a l'inégalité

$$\frac{1}{n^x} \leqslant \int_{n-1}^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t^x}.$$

2. Déduire de la question précédente que l'on a

$$\forall x \in]1,+\infty[, \quad 1 \leqslant \zeta(x) \leqslant 1 + \frac{1}{x-1}.$$

3. En utilisant les résultats précédents, en déduire que l'on a l'équivalent

$$b_{2p} \underset{p\to+\infty}{\sim} (-1)^{p+1} \frac{2(2p)!}{(2\pi)^{2p}}.$$

Fin