Localisation des valeurs propres d'une matrice complexe

Introduction

L'objectif principal de ce problème est d'établir le théorème de Gerschgorin ci-dessous qui permet de localiser les valeurs propres d'une matrice carrée dans une zone définie en fonction de ses coefficients.

Dans tout le problème, on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout nombre complexe $a \in \mathbb{C}$ et tout $r \in \mathbb{R}_+$, on note $D(a,r)$ le disque fermée de centre a et de rayon r, i.e.

$$D(a,r) = \left\{ z \in \mathbb{C} \mid |z-a| \leqslant r \right\}$$

Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ est une matrice carrée dont on note les coefficients $(a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$, on définit les disques de Gerschgorin $D_1(A), \dots, D_n(A)$ associés à la matrice A par

$$\forall i \in [\![1,n]\!], \quad D_i(A) = D\left(a_{i,i}, R_i(A)\right) \quad \text{avec} \quad R_i(A) = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^{n} \left| a_{i,j} \right|.$$

Théorème de Gerschgorin (1931) : L'ensemble des valeurs propres d'une matrice carrée complexe est inclus dans la réunion de ses disques de Gerschgorin.

Dans la première partie, on étudiera un premier exemple afin de se familiariser avec l'énoncé du théorème. Dans la seconde partie, on démontrera le théorème de Gerschgorin en commençant par prouver un lemme d'Hadamard. Dans la dernière partie, on déduira du théorème un encadrement du module des racines d'un polynôme complexe en fonction de ses coefficients.

I. Étude d'un exemple

Dans cette partie, on considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3+\mathrm{i} & 2 & 0 \\ -2 & -2+\mathrm{i} & 0 \\ 0 & 1+\mathrm{i} & 2 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{C}).$$

1. Préciser le centre et le rayon des disques de Gerschgorin associés à la matrice A.
2. Déterminer les valeurs propres de la matrice A.
3. Représenter dans le plan complexe les trois disques de Gerschgorin associés à la matrice A et les points dont les affixes sont les valeurs propres de A.
4. Montrer que $\mathrm{Sp}(A) \subset D_1(A) \cup D_2(A) \cup D_3(A)$.

II. Une démonstration du théorème de Gerschgorin

A. Le lemme d'Hadamard

On dit qu'une matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ dont on note les coefficients $(m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$ est à diagonale strictement dominante si

$$\forall i \in [\![1,n]\!], \quad |m_{i,i}| > \sum_{\substack{j=1\\ j\neq i}}^{n} |m_{i,j}|.$$

L'objectif de cette sous-partie est de démontrer le résultat suivant.

Le lemme d'Hadamard : Une matrice complexe à diagonale strictement dominante est inversible.

Pour démontrer ce résultat, on considère une matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ que l'on suppose non inversible.

1. Justifier qu'il existe un vecteur non nul $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ tel que $MX = 0$.

Soit $X = \begin{pmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{pmatrix}^\top \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ un vecteur colonne non nul tel que $MX = 0$.
On considère un indice $k \in [\![1,n]\!]$ tel que $|x_k| = \max\big(|x_1|,\dots,|x_n|\big) > 0$.

2. En examinant le k-ième coefficient de la relation $MX = 0$, montrer que

$$|m_{k,k}| \leqslant \sum_{\substack{j=1\\ j\neq k}}^{n} |m_{k,j}|.$$

3. En déduire une démonstration du lemme d'Hadamard.

4. On considère les deux matrices

$$U = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2+\mathrm{i} & 1 \\ 1 & 0 & 1+\mathrm{i} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{C}) \quad \text{et} \quad V = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{C}).$$

a) Déterminer si les matrices U et V sont inversibles.

b) La réciproque du lemme d'Hadamard est-elle vraie ?

B. Démonstration du théorème de Gerschgorin

Dans cette partie, on démontre le théorème de Gerschgorin à partir du lemme d'Hadamard. On considère une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

5. Montrer que si $\lambda \in \mathbb{C}$ est une valeur propre de A, alors la matrice $\lambda \mathrm{I}_n - A$ n'est pas inversible.

6. Démontrer le théorème de Gerschgorin.

7. On définit les disques $D'_1(A),\dots,D'_n(A)$ par

$$\forall j \in [\![1,n]\!], \quad D'_j(A) = D\Big(a_{j,j}, R'_j(A)\Big) \quad \text{avec} \quad R'_j(A) = \sum_{\substack{i=1\\ i\neq j}}^{n} |a_{i,j}|.$$

En appliquant le théorème de Gerschgorin à une matrice bien choisie, montrer que

$$\mathrm{Sp}(A) \subset \bigcup_{j=1}^{n} D'_j(A).$$

III. Localisation des racines d'un polynôme complexe

A. Polynôme caractéristique d'une matrice compagnon

Pour tout polynôme unitaire $P \in \mathbb{C}[X]$ de degré $d \in \mathbb{N}^*$ que l'on écrit

$$P(X) = X^d + \sum_{k=0}^{d-1} c_k X^k,$$

on définit sa matrice compagnon par

$$\operatorname{Comp}(P) = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & -c_0 \\ 1 & \ddots & \vdots & -c_1 \\ & \ddots & 0 & \vdots \\ (0) & & 1 & -c_{d-1} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_d(\mathbb{C}).$$

Dans les deux question suivantes, on détermine le polynôme caractéristique d'une matrice compagnon.

1. On considère un polynôme unitaire $P = X^d + \sum_{k=0}^{d-1} c_k X^k \in \mathbb{C}[X]$ de degré $d \geqslant 2$.

a) Déterminer un polynôme unitaire $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P = XQ(X) + c_0$.

b) Montrer que pour tout $\lambda \in \mathbb{C}$, on a $\chi_{\operatorname{Comp}(P)}(\lambda) = \lambda \chi_{\operatorname{Comp}(Q)}(\lambda) + c_0$.

2. En déduire que pour tout polynôme unitaire $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant, le polynôme caractéristique de la matrice $\operatorname{Comp}(P)$ est P.

B. Encadrement du module des racines d'un polynôme

Dans cette partie, on utilise le résultat de la partie précédente sur la matrice compagnon et le théorème de Gerschgorin pour encadrer le module des racines d'un polynôme complexe.

Dans la suite, on considère un polynôme $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{C}[X]$ de degré $n \in \mathbb{N}^*$.

3. En utilisant les résultats précédents, montrer que si $z \in \mathbb{C}$ est une racine de P, alors on a

$$|z| \leqslant \frac{\max\left(|a_0|, |a_1| + |a_n|, \ldots, |a_{n-1}| + |a_n|\right)}{|a_n|}.$$

4. On considère le polynôme $Q \in \mathbb{C}[X]$ défini par $Q(X) = \sum_{k=0}^{n} a_{n-k} X^k$.

a) Montrer que pour tout nombre complexe $z \in \mathbb{C}^*$, on a $P(z) = z^n Q\left(z^{-1}\right)$.

b) Soit $z \in \mathbb{C}^*$. Montrer que z est une racine de P si et seulement si z^{-1} est une racine de Q.

c) En déduire que si z est une racine de P, alors on a

$$|z| \geqslant \frac{|a_0|}{\max\left(|a_1| + |a_0|, \ldots, |a_{n-1}| + |a_0|, |a_n|\right)}.$$

Fin