L'irrationalité du nombre π

Introduction

L'objectif de ce problème est de démontrer le résultat suivant.

Théorème (Lambert, 1761) : Le nombre π n'est pas un nombre rationnel.

Dans la suite du problème, on raisonne par l'absurde en supposant qu'il existe un couple $(p,q) \in (\mathbb{N}^*)^2$ tel que $\pi = p/q$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère le polynôme $P_n \in \mathbb{R}[X]$ défini par

$$P_n = \frac{1}{n!} X^n (p - qX)^n.$$

On considère également la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad I_n = \int_0^\pi P_n(t)\sin(t)\,\mathrm{d}t.$$

I. Propriétés des polynômes P_n

Dans cette partie, on fixe un entier $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Déterminer les racines de P_n et leur multiplicité respective.
2. En déduire que $P_n^{(m)}(0) = P_n^{(m)}(\pi) = 0$ pour tout $m \in [\![0, n-1]\!]$.
3. Montrer que l'on a
$$P_n = \frac{1}{n!}\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^{n-k}(-q)^k X^{n+k}.$$
4. Montrer que pour tout $m \in [\![n, 2n]\!]$, on a
$$P_n^{(m)} = \sum_{k=m-n}^{n} \binom{n}{k}\binom{n+k}{m} \frac{m!}{n!} p^{n-k}(-q)^k X^{n+k-m}.$$
5. En déduire que $P_n^{(m)}(0) \in \mathbb{Z}$ et $P_n^{(m)}(\pi) \in \mathbb{Z}$ pour tout $m \in [\![n, 2n]\!]$.

II. Propriétés du nombre I_n

Dans cette partie, on fixe un entier $n \in \mathbb{N}^*$. L'objectif est de montrer que I_n est un entier.

1. Montrer que pour tout $m \in \mathbb{N}$, on a
$$I_n = \sum_{k=0}^{m} (-1)^k \left(P_n^{(k)}(\pi) + P_n^{(k)}(0)\right) + (-1)^m \int_0^\pi P_n^{(2m+1)}(t)\cos(t)\,\mathrm{d}t.$$
2. Que vaut le polynôme $P_n^{(2n+1)}$?
3. En déduire que $I_n \in \mathbb{Z}$.

III. Convergence de la suite (I_n)

Dans cette partie, on démontre que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

1. On fixe un réel $\alpha > 0$ et on considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \frac{\alpha^n}{n!} \quad \text{et} \quad v_n = \frac{u_{n+1}}{u_n}.$$

a) Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

On peut donc fixer un entier $N \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant N$, on a $|v_n| \leqslant 2^{-1}$.

b) Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant N$, on a $0 \leqslant u_n \leqslant 2^{N-n} \cdot u_N$.

c) En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.

2. Montrer pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ que

$$0 \leqslant I_n \leqslant \frac{\pi^{n+1}(p+q\pi)^n}{n!}.$$

3. En déduire que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.

IV. Conclusion

1. Déduire des deux parties précédentes qu'il existe $N \in \mathbb{N}^*$ tel que $I_N = 0$.

2. Conclure que π n'est pas un nombre rationnel.

Fin