Calcul des intégrales de Gauss

Introduction

L'objectif de ce problème est de démontrer la convergence pour tour réel $a > 0$ de l'intégrale

$$G_a = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-at^2}\,\mathrm{d}t$$

et de calculer sa valeur. Une intégrale ce cette forme est appelée une intégrale de Gauss.

I. Convergence des intégrales de Gauss

Pour tout $a > 0$, on considère la fonction $f_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f_a : t \mapsto \mathrm{e}^{-at^2}$.

1. Montrer que pour tout $a > 0$, la fonction f_a est intégrable sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que pour tout $a > 0$, on a l'égalité $G_a = \dfrac{G_1}{\sqrt{a}}$.

II. Les intégrales de Wallis

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère l'intégrale définie par

$$W_n = \int_0^{\pi/2} \cos^n(\theta)\,\mathrm{d}\theta.$$

Les intégrales précédentes s'appellent les intégrales de Wallis.

1. Calculer W_0 et W_1.

2. **a)** En utilisant une intégration par parties, montrer que $(n+1)W_{n+1} = nW_{n-1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

b) En déduire que la suite $(nW_nW_{n-1})_{n\in\mathbb{N}^*}$ est constante de valeur $\pi/2$.

3. Montrer que la suite $(W_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est positive et décroissante.

4. **a)** En utilisant les deux questions précédentes, montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\frac{\pi}{2(n+1)} \leqslant W_n^2 \leqslant \frac{\pi}{2n}.$$

b) Conclure que $W_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{\dfrac{\pi}{2n}}$.

III. Calcul des intégrales de Gauss

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère les intégrales

$$I_n = \int_0^{\sqrt{n}} \left(1 - \frac{t^2}{n}\right)^n \mathrm{d}t \quad \text{et} \quad J_n = \int_0^{+\infty} \left(1 + \frac{t^2}{n}\right)^{-n} \mathrm{d}t.$$

1. Montrer que l'intégrale J_n est convergente pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

2. **a)** Montrer que pour tout $x \in]-1, +\infty[$, on a l'inégalité $\ln(1+x) \leqslant x$.

b) En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a l'inégalité

$$I_n \leqslant \int_0^{\sqrt{n}} \mathrm{e}^{-t^2} \mathrm{d}t \leqslant J_n.$$

3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

a) Montrer que $I_n = \sqrt{n}\, W_{2n+1}$ en utilisant le changement de variable $t = \sqrt{n} \sin(\theta)$.

b) Montrer que $J_n = \sqrt{n}\, W_{2n-2}$ en utilisant le changement de variable $t = \sqrt{n} \tan(\theta)$.

4. En déduire la valeur de l'intégrale G_a pour tout réel $a > 0$.

Fin