Calcul de l'intégrale de Dirichlet

Introduction

L'objectif de ce problème est de démontrer la convergence de l'intégrale de Dirichlet

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$$

et de calculer sa valeur en utilisant des intégrales à paramètre.

Dans tout le problème, on considère la fonction $f : [0,+\infty[\times]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall (x,t) \in [0,+\infty[\times]0,+\infty[, \quad f(x,t) = \frac{\sin(t)}{t}\mathrm{e}^{-xt}.$$

On définit également la fonction réelle d'une variable réelle F par

$$F : x \mapsto \int_0^{+\infty} f(x,t)\,\mathrm{d}t.$$

I. Préliminaires

Dans cette partie, on établit quelques résultats que nous utiliserons dans la suite du problème.

1. Dans cette question, on vérifie que F est définie sur $[0,+\infty[$. On considère l'intégrale

$$J = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

- **a)** Soit $x > 0$. Montrer que la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est intégrable sur $]0,+\infty[$.
- **b)** Montrer que l'intégrale J est convergente.
- **c)** En déduire que l'intégrale I est convergente.

2. Soit $x \in \mathbb{R}$. Dans cette question, on détermine une primitive de la fonction $t \mapsto \sin(t)\mathrm{e}^{-xt}$.

- **a)** Déterminer une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{(\mathrm{i}-x)t}$.
- **b)** Déduire de la question précédente que la fonction $t \mapsto u(x,t)$ définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad u(x,t) = -\frac{x\sin(t)+\cos(t)}{1+x^2}\mathrm{e}^{-xt}.$$

est une primitive sur $\mathbb{R}$ de la fonction $t \mapsto \sin(t)\mathrm{e}^{-xt}$.

3. Montrer que $|\sin(t)| \leqslant |t|$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

II. Calcul de $F(x)$ pour $x > 0$

Dans cette partie, on détermine un expression explicite de F sur $]0, +\infty[$.

1. **a)** Montrer que $|F(x)| \leqslant x^{-1}$ pour tout $x > 0$.

b) En déduire la limite de de la fonction F en $+\infty$.

2. **a)** Soit $a > 0$. Montrer que la fonction F est dérivable sur $[a, +\infty[$ et que

$$\forall x \in [a, +\infty[, \quad F'(x) = -\int_0^{+\infty} \sin(t) \mathrm{e}^{-xt} \, \mathrm{d}t.$$

b) En déduire que la fonction F est dérivable sur $]0, +\infty[$ et déterminer une expression explicite du nombre $F'(x)$ pour tout $x \in]0, +\infty[$.

3. Déduire des questions précédentes que

$$\forall x > 0, \quad F(x) = \frac{\pi}{2} - \operatorname{Arctan}(x).$$

III. Calcul de l'intégrale de Dirichlet

On considère les fonctions $F_1 : [0, 1] \to \mathbb{R}$ et $F_2 : [0, 1] \to \mathbb{R}$ définies par

$$\forall x \in [0, 1], \quad F_1(x) = \int_0^1 f(x, t) \, \mathrm{d}t \quad \text{et} \quad F_2(x) = \int_1^{+\infty} f(x, t) \, \mathrm{d}t.$$

1. Montrer que la fonction F_1 est continue sur $[0, 1]$.

2. Dans cette question, on considère la fonction $u : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie dans la question **I.2.b**.

a) Soit $x \in [0, 1]$. Montrer que la fonction $t \mapsto \dfrac{u(x, t)}{t^2}$ est intégrable sur $[1, +\infty[$ et que

$$F_2(x) = \frac{x \sin(1) + \cos(1)}{1 + x^2} \mathrm{e}^{-x} + \int_1^{+\infty} \frac{u(x, t)}{t^2} \, \mathrm{d}t.$$

b) En déduire que la fonction F_2 est continue sur $[0, 1]$.

3. Conclure que la fonction F est continue en 0, puis déterminer la valeur de l'intégrale I.

Fin