Calcul de l'intégrale de Dirichlet

Introduction

L'objectif de ce problème est de démontrer la convergence de l'intégrale de Dirichlet

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$$

et de calculer sa valeur en utilisant des outils élémentaires.

I. Convergence de l'intégrale de Dirichlet

Dans cette partie, on démontre que l'intégrale I est convergente. On considère l'intégrale

$$J = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que l'intégrale J est convergente.

2. En déduire que l'intégrale I est convergente.

II. Étude d'une suite auxiliaire

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on introduit l'intégrale

$$J_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin\big((2n+1)\,t\big)}{\sin(t)}\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que l'intégrale J_n est convergente pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Montrer que pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$\sin(a) - \sin(b) = 2\cos\left(\frac{a+b}{2}\right)\sin\left(\frac{a-b}{2}\right).$$

3. En déduire que $J_{n+1} = J_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

4. Conclure que $J_n = \pi/2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

III. Étude d'une fonction auxiliaire

On définit la fonction $\varphi : [0, \pi/2] \to \mathbb{R}$ par

$$\varphi(0) = 0 \quad \text{et} \quad \forall t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right], \quad \varphi(t) = \frac{1}{t} - \frac{1}{\sin(t)}.$$

1. Régularité de la fonction φ.

a) Montrer que la fonction φ est continue en 0.

b) Montrer que la fonction φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0, \pi/2]$ et que

$$\forall t \in \left]0, \frac{\pi}{2}\right], \quad \varphi'(t) = \frac{t^2 \cos(t) - \sin^2(t)}{t^2 \sin^2(t)}.$$

c) Montrer que la fonction φ' admet une limite finie lorsque $t \to 0^+$.

d) En déduire que la fonction φ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $[0, \pi/2]$.

2. Un cas particulier du lemme de Riemann-Lebesgue.

a) Montrer que

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{1}{2n+1} \int_0^{\pi/2} \varphi'(t) \cos\big((2n+1)t\big)\, \mathrm{d}t = 0.$$

b) Conclure que

$$\lim_{n \to +\infty} \int_0^{\pi/2} \varphi(t) \sin\big((2n+1)t\big)\, \mathrm{d}t = 0.$$

IV. Calcul de l'intégrale de Dirichlet

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on introduit l'intégrale

$$K_n = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin\big((2n+1)t\big)}{t}\, \mathrm{d}t.$$

On considère également la suite $(J_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie dans la partie **II**.

1. Montrer que l'intégrale K_n est convergente pour tout $n \in \mathbb{N}$.

2. Montrer que la suite $(K_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers I. On pourra utiliser un changement de variable.

3. Montrer que $\lim\limits_{n \to +\infty} K_n - J_n = 0$.

4. En déduire la valeur de l'intégrale I.

Fin