La fonction $\ln(\Gamma)$

Introduction

Dans ce problème, on souhaite déterminer les fonctions $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ vérifiant

(i) la fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$,

(ii) pour tout $x \in]0,+\infty[$, on a $f(x+1) - f(x) = \ln(x)$,

(iii) la fonction f' est croissante,

(iv) la fonction f s'annule en 1, c'est-à-dire $f(1) = 0$.

Dans la suite, on note (C) l'ensemble de ces quatre conditions.

I. Existence de la solution du problème étudié

Dans cette partie, on construit une fonction vérifiant les conditions de (C).
Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on définit la fonction $u_n :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ par

$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad u_n(x) = x\ln\left(1+\frac{1}{n}\right) - \ln\left(1+\frac{x}{n}\right).$$

1. Montrer que la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} u_n$ converge simplement sur $]0,+\infty[$.

Dans tout le reste de cet exercice, on note $\varphi :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad \varphi(x) = -\ln(x) + \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(x).$$

2. Justifier que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est une suite de fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur $]0,+\infty[$, puis montrer qu'il existe une suite $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ telle que la série $\sum_{n\geqslant 1} \varepsilon_n$ converge absolument et que

$$\forall (n,x) \in \mathbb{N}^* \times]0,+\infty[, \quad u_n'(x) = \frac{x}{n(n+x)} + \varepsilon_n.$$

3. En déduire que la série de fonctions $\sum_{n\geqslant 1} u_n'$ converge normalement sur tout segment $[a,b]$ inclus dans $]0,+\infty[$.

4. Montrer que la fonction φ vérifie les conditions de (C).

II. Unicité de la solution

Dans cette partie, on montre que φ est l'unique fonction vérifiant les conditions de (C). On considère une fonction $g :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ vérifiant les conditions de (C) et on pose $h = \varphi - g$.

1. Montrer pour tout $x > 0$ qu'on a $h(x+1) = h(x)$ et $h'(x+1) = h'(x)$.

2. Soient $x \in]0,1]$ et $p \in \mathbb{N}^*$. Montrer successivement que

$$\varphi'(p) - g'(1+p) \leqslant h'(x+p) \leqslant \varphi'(1+p) - g'(p), \qquad \varphi'(p) - g'(1+p) = h'(p) - \frac{1}{p}.$$

En déduire que

$$\left|h'(x+p) - h'(p)\right| \leqslant \frac{1}{p}.$$

3. Déduire des deux questions précédentes que la fonction h' est constante sur $]0,+\infty[$.

4. Conclure que $\varphi = g$.

III. La formule de duplication

Dans cette partie, on considère la fonction $\psi :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad \psi(x) = (x-1)\ln(2) + \varphi\left(\frac{x}{2}\right) + \varphi\left(\frac{x+1}{2}\right) - \frac{1}{2}\ln(\pi).$$

1. Montrer que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, on a la relation

$$\exp\left(\sum_{n=1}^{N} u_n\left(\frac{1}{2}\right)\right) = \frac{\sqrt{N+1}}{2N+1}\,\frac{\left(2^N N!\right)^2}{(2N)!}.$$

2. Déduire de la question précédente et de la formule de Stirling que $\psi(1) = 0$.

3. Montrer que pour tout $x \in]0,+\infty[$, on a

$$(x-1)\ln(2) + \varphi\left(\frac{x}{2}\right) + \varphi\left(\frac{x+1}{2}\right) = \varphi(x) + \frac{1}{2}\ln(\pi).$$

Fin