Fonction dilogarithme

Introduction

Dans ce problème, on étudie la fonction dilogarithme $L :]-\infty, 1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in]-\infty, 1], \quad L(x) = \int_0^{+\infty} \frac{xt}{\mathrm{e}^t - x}\,\mathrm{d}t.$$

On admet et on pourra utiliser librement l'égalité

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

I. Existence et premières propriétés de la fonction dilogarithme

Dans cette partie, on considère la fonction $f :]0, +\infty[\times]-\infty, 1] \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall (t, x) \in]0, +\infty[\times]-\infty, 1], \quad f(t, x) = \frac{t}{\mathrm{e}^t - x}.$$

1. Justifier que la fonction f est bien définie sur $]0, +\infty[\times]-\infty, 1]$.

2. Montrer que la fonction $t \mapsto f(t, 1)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

3. Soit $x \in]-\infty, 1]$. En comparant les fonctions $t \mapsto f(t, x)$ et $t \mapsto f(t, 1)$, montrer que $t \mapsto f(t, x)$ est intégrable sur $]0, +\infty[$.

4. Montrer que la fonction L est continue sur $]-\infty, 1]$.

II. Développement en série entière

Dans cette partie, on montre que la fonction L est développable en série entière. On considère un nombre réel $x \in [-1, 1]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction $s_n :]0, +\infty[\to \mathbb{R}$ par

$$\forall t \in]0, +\infty[, \quad s_n(t) = t\mathrm{e}^{-(n+1)t} x^n.$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} s_n(t)\,\mathrm{d}t$ converge et que $\displaystyle\int_0^{+\infty} s_n(t)\,\mathrm{d}t = \frac{x^n}{(n+1)^2}$.

2. Montrer que la série de fonctions $\displaystyle\sum_{n \geqslant 0} s_n$ converge simplement sur $]0, +\infty[$ et que

$$\forall t \in]0, +\infty[, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} s_n(t) = f(t, x).$$

3. Montrer que la série $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \frac{x^n}{n^2}$ converge et déduire des questions précédentes que $\displaystyle L(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2}$.

4. Montrer que pour tout $x \in [-1, 1]$, on a $L(x) + L(-x) = \dfrac{1}{2} L(x^2)$.

5. Déduire des questions précédentes les valeurs de $L(1)$ et $L(-1)$.

III. Une autre propriété

Dans cette partie, on considère la fonction $h :]0,1[\to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in]0,1[, \quad h(x) = L(x) + L(1-x) + \ln(x)\ln(1-x).$$

1. Justifier que la fonction L est dérivable sur $]-1,1[$ et montrer que l'on a

$$\forall x \in]-1,1[, \quad L'(x) = \begin{cases} -\dfrac{\ln(1-x)}{x} & \text{si} \quad x \neq 0 \\ 1 & \text{si} \quad x = 0. \end{cases}$$

2. Montrer que la fonction h est constante sur $]0,1[$.

3. Montrer que $h(x) = L(1)$ pour tout $x \in]0,1[$.

4. En déduire la valeur de l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t}{2\mathrm{e}^t - 1}\,\mathrm{d}t$.

Fin