Extremums d'une forme quadratique sur la boule unité fermée

Introduction

On se donne un entier $n \geqslant 2$. On rappelle que la norme euclidienne usuelle $\|\cdot\|$ sur $\mathbb{R}^n$ est définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad x = (x_1, \ldots, x_n), \quad \|x\| = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}.$$

On note $B_n = \{x \in \mathbb{R}^n \mid \|x\| \leqslant 1\}$ la boule unité fermée de $\mathbb{R}^n$.

On fixe des réels $a_{i,j}$ pour $1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n$ et on considère l'application $f : B_n \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=i}^{n} a_{i,j} x_i x_j \right) = \sum_{1 \leqslant i \leqslant j \leqslant n} a_{i,j} x_i x_j.$$

L'objectif de ce problème est d'étudier les extremums de la fonction f sur la partie B_n. On définit la matrice $M_f \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ comme la matrice symétrique dont les coefficients $(m_{i,j})$ vérifient

$$\forall (i,j) \in [\![1, n]\!]^2, \quad m_{i,j} = \begin{cases} a_{i,i} & \text{si} \quad i = j \\ \dfrac{a_{i,j}}{2} & \text{si} \quad i < j. \end{cases}$$

I. Étude d'un exemple

Dans cette partie, on suppose que $n = 2$ et que l'application $f : B_2 \to \mathbb{R}$ est définie par

$$\forall (x_1, x_2) \in B_2, \quad f(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 + 4x_1x_2.$$

1. Justifier que l'application f admet un maximum et un minimum sur B_2.
2. En étudiant la fonction $t \mapsto f(\cos(t), \sin(t))$, déterminer les extremums de l'application f sur la frontière $S_2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 = 1\}$ de B_2.
3. Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^1$ et déterminer les points critiques de l'application f dans la boule unité ouverte $B_2' = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \mid x_1^2 + x_2^2 < 1\}$ de $\mathbb{R}^2$.
4. En déduire que le maximum de f sur B_2 est 3 et que le minimum de f sur B_2 est -1.
5. Vérifier que la plus grande valeur propre de M_f est égale au maximum de f sur B_2 et que la plus petite valeur propre de M_f est égale au minimum de f sur B_2.

II. Le cas général

On ne suppose plus dans cette partie que $n = 2$. On considère un vecteur $x = (x_1, \ldots, x_n) \in B_n$ et on note $X = (x_1 \ \cdots \ x_n)^\top \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $f(x) = X^\top M_f X$.

2. Justifier que la matrice M_f est diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.

Dans la suite, on note $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ les valeurs propres de M_f comptées avec leur multiplicité et on suppose que $\lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$. On fixe une matrice orthogonale $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$ telle que $M_f = PDP^{-1}$ où

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}).$$

On note $Y = P^{-1}X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$.

3. Montrer les égalités $Y^\top Y = X^\top X = \|x\|^2$.

4. On suppose que $\lambda_1 < 0 < \lambda_n$. Montrer que $\lambda_1 \leqslant Y^\top DY \leqslant \lambda_n$ et en déduire que $\lambda_1 \leqslant f(x) \leqslant \lambda_n$.

5. En déduire que si $\lambda_1 < 0 < \lambda_n$, alors $\max_{B_n}(f) = \lambda_n$ et $\min_{B_n}(f) = \lambda_1$.

6. Dans le cas où $\lambda_1 \geqslant 0$, déterminer le maximum et le minimum de f sur B_n.

III. Application des résultats

Dans cette partie, on suppose que $n \geqslant 3$ et que l'application $f : B_n \to \mathbb{R}$ est définie par

$$\forall (x_1, \ldots, x_n) \in B_n, \quad f(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 - \sum_{1 \leqslant i < j \leqslant n} 2x_i x_j.$$

1. Déterminer le rang de la matrice $M_f - 2\mathrm{I}_n$.

2. En déduire le maximum et le minimum de l'application f sur B_n.

Fin