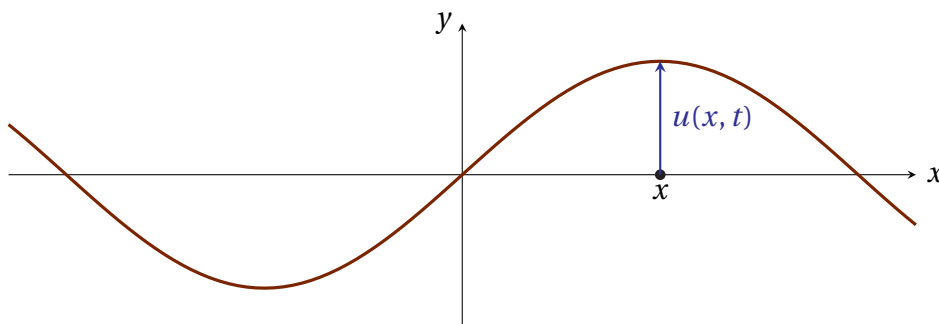


# Équation des ondes

## Introduction

On considère une corde horizontale tendue de densité uniforme et constante. La corde au repos se trouve le long de l'axe des abscisses. À l'instant  $t = 0$ , on déforme la corde dans la direction  $y$  (orthogonale à l'axe des abscisses) et on la lâche. On souhaite étudier le mouvement de la corde dans le temps. On note  $u(x, t)$  le vecteur de déplacement de la corde à l'instant  $t \geq 0$  par rapport à la position d'équilibre. Pour chaque valeur de  $t \geq 0$ , on peut représenter la situation par le graphique ci-dessous.



Si l'on néglige le déplacement longitudinal et qu'on applique le principe fondamental de la dynamique, on obtient que la fonction  $u$  vérifie l'équation des ondes unidimensionnelle

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$$

où  $c$  est une constante positive dépendant des caractéristiques de la corde.

De nombreux autres problèmes en physique se ramènent à l'équation des ondes. Historiquement, cette équation a été étudiée par Jean Bernoulli et Jean le Rond d'Alembert durant le XVIII<sup>e</sup> siècle afin notamment de comprendre les vibrations d'une corde de violon.

L'objectif de ce problème est de résoudre cette équation aux dérivées partielles dans différents cas avec les outils développés en mathématiques.

## I. L'équation des ondes en domaine non borné

Dans cette partie, on étudie le problème énoncé dans l'introduction (la corde est de longueur infinie). On fixe un réel  $c > 0$ , une fonction  $p : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^2$  et une fonction  $q : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^1$ .

Nous allons déterminer les fonctions  $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^2$  vérifiant

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = 0 \quad (1)$$

avec les conditions initiales

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \lim_{t \rightarrow 0^+} u(x, t) = p(x) \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = q(x). \quad (2)$$

## A. Résolution de l'équation des ondes

Dans cette partie, on considère une fonction  $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^2$  et on définit  $v : T \rightarrow \mathbb{R}$  par

$$\forall (a, b) \in T, \quad v(a, b) = u\left(\frac{a+b}{2}, \frac{b-a}{2c}\right) \quad \text{avec} \quad T = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 \mid a < b\}.$$

1. Justifier que la fonction  $v$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $T$ .
2. Montrer que l'on a la relation

$$\forall (a, b) \in T, \quad \frac{\partial^2 v}{\partial a \partial b}(a, b) = \frac{1}{4} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\left(\frac{a+b}{2}, \frac{b-a}{2c}\right) - \frac{1}{4c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\left(\frac{a+b}{2}, \frac{b-a}{2c}\right).$$

3. En déduire que  $u$  est solution de l'équation aux dérivées partielles (1) si et seulement si

$$\frac{\partial^2 v}{\partial a \partial b} = 0.$$

4. En déduire que  $u$  est solution de l'équation aux dérivées partielles (1) si et seulement si il existe des fonctions  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  et  $\beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^2$  vérifiant

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*, \quad u(x, t) = \alpha(x - ct) + \beta(x + ct).$$

## B. Solution avec les conditions initiales

On considère une solution  $u : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$  de l'équation aux dérivées partielles (1) vérifiant les conditions initiales (2). On souhaite déterminer une expression explicite de  $u$  en fonction des données du problème. D'après les résultats de la partie précédente, il existe des fonctions  $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  et  $\beta : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^2$  telles que

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*, \quad u(x, t) = \alpha(x - ct) + \beta(x + ct).$$

5. En utilisant les conditions initiales (2), montrer que l'on a les relations

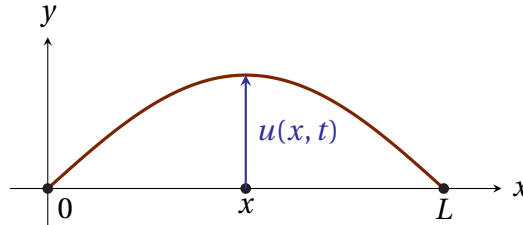
$$\alpha + \beta = p \quad \text{et} \quad c\alpha' - c\beta' = q.$$

6. En déduire que l'équation aux dérivées partielles (1) avec les conditions initiales (2) admet une unique solution définie par la formule de d'Alembert suivante

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+^*, \quad u(x, t) = \frac{1}{2} (p(x + ct) + p(x - ct)) + \frac{1}{2c} \int_{x-ct}^{x+ct} q(y) dy.$$

## II. L'équation des ondes en domaine borné

Dans cette partie, on suppose que la corde est de longueur finie  $L > 0$  et qu'elle est fixée à chacune de ses extrémités que l'on place dans notre repère en  $x = 0$  et  $x = L$ . C'est par exemple la situation dans laquelle on se trouve si on souhaite étudier les vibrations d'une corde de violon. Pour chaque valeur de  $t \geq 0$ , on peut représenter la situation par le graphique ci-dessous.



On fixe un réel  $c > 0$ , une fonction  $p : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^4$  et une fonction  $q : [0, L] \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $\mathcal{C}^3$  vérifiant les conditions

$$p(0) = p(L) = p''(0) = p''(L) = q(0) = q(L) = 0. \quad (3)$$

Nous allons construire une fonction  $u : ]0, L[ \times \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$  vérifiant

$$\forall (x, t) \in ]0, L[ \times \mathbb{R}_+, \quad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x, t) - \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x, t) = 0 \quad (4)$$

avec les conditions initiales

$$\forall x \in ]0, L[, \quad \lim_{t \rightarrow 0^+} u(x, t) = p(x) \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow 0^+} \frac{\partial u}{\partial t}(x, t) = q(x). \quad (5)$$

et la condition aux limites de Dirichlet

$$\forall t \in \mathbb{R}_+^*, \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} u(x, t) = \lim_{x \rightarrow L^-} u(x, t) = 0. \quad (6)$$

L'approche de la partie précédente ne permet pas facilement de manipuler la condition aux limites (6). Nous allons donc utiliser une autre méthode pour construire une solution à notre problème.

### A. Méthode de séparation des variables

Dans cette partie, on considère une fonction **non nulle**  $u : ]0, L[ \times \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$  de la forme

$$u(x, t) = f(x)g(t)$$

où  $f : ]0, L[ \rightarrow \mathbb{R}$  et  $g : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$  sont des fonctions de classe  $\mathcal{C}^2$ . On suppose que  $u$  est solution de l'équation aux dérivées partielles (4) avec la condition aux limites (6). Nous allons déterminer une expression explicite de la fonction  $u$ .

1. Montrer que l'on a la relation

$$\forall (x, t) \in ]0, L[ \times \mathbb{R}_+^*, \quad c^2 f''(x)g(t) = f(x)g''(t).$$

2. En déduire qu'il existe une constante  $\lambda \in \mathbb{R}$  telle que

$$\forall x \in ]0, L[, \quad f''(x) = \lambda f(x) \quad \text{et} \quad \forall t \in \mathbb{R}_+^* \quad g''(t) = \lambda c^2 g(t).$$

3. Dans cette question, on suppose que  $\lambda = 0$ .

a) En utilisant la question II.2, montrer qu'il existe  $(A, B, C, D) \in \mathbb{R}^4$  telle que

$$\forall (x, t) \in ]0, L[ \times \mathbb{R}_+^*, \quad u(x, t) = (Ax + B)(Ct + D).$$

b) En utilisant que  $u$  vérifie la condition aux limites (6), en déduire que  $u$  est la fonction nulle.

4. Dans cette question, on suppose que  $\lambda > 0$  et on note  $\mu = \sqrt{\lambda}$ .

a) En utilisant la question II.2, montrer qu'il existe  $(A, B, C, D) \in \mathbb{R}^4$  telle que

$$\forall (x, t) \in ]0, L[ \times \mathbb{R}_+^*, \quad u(x, t) = (Ae^{\mu x} + Be^{-\mu x})(Ce^{\mu ct} + De^{-\mu ct}).$$

b) En utilisant que  $u$  vérifie la condition aux limites (6), en déduire que  $u$  est la fonction nulle.

5. Dans cette question, on suppose que  $\lambda < 0$  et on note  $\omega = \sqrt{-\lambda}$ .

a) En utilisant la question II.2, montrer qu'il existe  $(A, B, C, D) \in \mathbb{R}^4$  telle que

$$\forall (x, t) \in ]0, L[ \times \mathbb{R}_+^*, \quad u(x, t) = (A \cos(\omega x) + B \sin(\omega x))(C \cos(\omega ct) + D \sin(\omega ct)).$$

b) En utilisant que  $u$  vérifie la condition aux limites (6), en déduire qu'il existe  $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R}^2$  et  $n \in \mathbb{Z}$  tels que

$$\forall (x, t) \in ]0, L[ \times \mathbb{R}_+^*, \quad u(x, t) = \alpha \sin\left(n \frac{\pi}{L} x\right) \cos\left(n \frac{\pi c}{L} t\right) + \beta \sin\left(n \frac{\pi}{L} x\right) \sin\left(n \frac{\pi c}{L} t\right).$$

6. Réciproquement, montrer pour tout entier  $n \in \mathbb{Z}$  que les fonctions

$$\varphi_n : ]0, L[ \times \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{et} \quad \psi_n : ]0, L[ \times \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$$

définies pour tout  $(x, t) \in ]0, L[ \times \mathbb{R}_+^*$  par

$$\varphi_n(x, t) = \sin\left(n \frac{\pi}{L} x\right) \cos\left(n \frac{\pi c}{L} t\right) \quad \text{et} \quad \psi_n(x, t) = \sin\left(n \frac{\pi}{L} x\right) \sin\left(n \frac{\pi c}{L} t\right)$$

sont solutions de l'équation aux dérivées partielles (4) avec la conditions aux limites (6).

## B. Construction d'une solution aux problèmes

On note  $\hat{p} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  et  $\hat{q} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  les fonctions impaires et  $2L$ -périodiques vérifiant

$$\forall x \in [0, L], \quad \hat{p}(x) = p(x) \quad \text{et} \quad \hat{q}(x) = q(x).$$

7. Justifier que les fonctions  $\hat{p}$  et  $\hat{q}$  sont développables en série de Fourier.

8. Justifier qu'il existe des suites  $(p_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  et  $(q_n)_{n \in \mathbb{N}^*}$  telles que

$$\forall x \in ]0, L[, \quad p(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} p_n \sin\left(n \frac{\pi}{L} x\right) \quad \text{et} \quad q(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} q_n \sin\left(n \frac{\pi}{L} x\right).$$

9. Exprimer les coefficients  $p_n$  et  $q_n$  en fonction de  $p$  et  $q$  pour tout  $n \in \mathbb{N}^*$ .

Dans la suite, on considère les fonctions  $\varphi_n$  et  $\psi_n$  définie dans la question II.6. On admet que l'hypothèse (3) implique pour tout élément  $(x, t) \in ]0, L[ \times \mathbb{R}_+^*$  la convergence de la série de terme général

$$u_n(x, t) = p_n \varphi_n(x, t) + q_n \frac{L}{n\pi c} \psi_n(x, t).$$

En particulier, on peut définir la fonction  $u : ]0, L[ \times \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$  par

$$u(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \left( p_n \varphi_n(x, t) + q_n \frac{L}{n\pi c} \psi_n(x, t) \right). \quad (7)$$

On admet également que l'hypothèse (3) implique que

- (i) la fonction  $u$  est de classe  $\mathcal{C}^2$  sur  $]0, L[ \times \mathbb{R}_+^*$ ,
- (ii) on peut calculer les dérivées partielles d'ordre 2 de  $u$  en dérivant terme à terme la somme,
- (iii) pour tout  $(x_0, t_0) \in [0, L] \times \mathbb{R}_+$ , on a

$$\lim_{(x,t) \rightarrow (x_0,t_0)} u(x, t) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lim_{(x,t) \rightarrow (x_0,t_0)} u_n(x, t).$$

- 10.** Montrer que la fonction  $u$  définie en (7) est une solution de l'équation aux dérivées partielles (4) avec les conditions initiales (5) et la condition aux limites (6).

**Fin**