Équation fonctionnelle

Introduction

Dans ce problème, on souhaite déterminer les fonctions $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ vérifiant les relations :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 \quad \text{et} \quad \forall x \in]0,+\infty[, \quad f(x+1)+f(x) = \frac{1}{x^2}. \tag{P}$$

I. Existence et unicité de la solution du problème (P)

Dans cette partie, on démontre que le problème (P) admet une unique solution et on détermine une expression de celle-ci sous la forme d'une série de fonctions.

Existence d'une solution

1. Soit $x \in]0,+\infty[$.

a) Montrer que la suite $\left(\dfrac{1}{(x+k)^2}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ est décroissante.

b) En déduire que la série $\displaystyle\sum_{k\geqslant 0} \frac{(-1)^k}{(x+k)^2}$ converge et que l'on a $\displaystyle\left|\sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(x+k)^2}\right| \leqslant \frac{1}{x^2}$.

Dans tout le reste de ce problème, on note

$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad \varphi(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(x+k)^2}.$$

2. Montrer que pour tout $x \in]0,+\infty[$, on a $\varphi(x+1)+\varphi(x) = \dfrac{1}{x^2}$.

3. Montrer que la fonction φ est une solution de (P).

Unicité de la solution

4. Montrer que si $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ est une solution de (P), alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad f(x) = (-1)^{n+1} f(x+n+1) + \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(x+k)^2}.$$

5. En déduire que la fonction φ est l'unique solution de (P).

II. Expression intégrale de la solution du problème (P)

Dans cette partie, on détermine une expression de φ sous la forme d'une intégrale.

1. Soit $\alpha \in]0,+\infty[$.

a) Déterminer une primitive de la fonction $t \mapsto t^{\alpha-1}\ln(t)$ sur $]0,+\infty[$.

b) En déduire que la fonction $t \mapsto t^{\alpha-1}\ln(t)$ est intégrable sur $]0,1]$ et que l'on a

$$\int_0^1 t^{\alpha-1}\ln(t)\mathrm{d}t = -\frac{1}{\alpha^2}.$$

2. On considère un élément $x \in]0,+\infty[$.

a) Justifier que pour tout $t \in]0,1]$, on a

$$\frac{t^{x-1}\ln(t)}{1+t} = \sum_{k=0}^{+\infty}(-1)^k t^{x+k-1}\ln(t).$$

b) En déduire que la fonction $t \mapsto \dfrac{t^{x-1}\ln(t)}{1+t}$ est intégrable sur $]0,1]$ et que :

$$\varphi(x) = -\int_0^1 \frac{t^{x-1}\ln(t)}{1+t}\mathrm{d}t.$$

3. **a)** Pour tout $a > 0$, montrer que la fonction φ est continue sur $[a,+\infty[$. En déduire que φ est continue sur $]0,+\infty[$.

b) En utilisant que φ est une solution du problème (P), en déduire un équivalent simple de φ au voisinage de 0^+.

4. **a)** Montrer que la fonction φ est décroissante sur $]0,+\infty[$.

b) En utilisant la question précédente avec la relation (P), montrer que

$$\forall x \in]1,+\infty[, \quad \frac{1}{x^2} \leqslant 2\varphi(x) \leqslant \frac{1}{(x-1)^2}.$$

En déduire un équivalent de φ en $+\infty$.

Fin