Équation fonctionnelle

Introduction

Dans ce problème, on souhaite déterminer les fonctions $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ vérifiant les relations :

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0 \quad \text{et} \quad \forall x \in]0,+\infty[, \quad f(x+1)+f(x) = \frac{1}{x^2}. \tag{P}$$

I. Existence et unicité de la solution du problème (P)

Dans cette partie, on démontre que le problème (P) admet une unique solution et on détermine une expression de celle-ci sous la forme d'une série de fonctions.

A. Existence d'une solution

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, on définit la fonction $\varphi_k :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ par :

$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad \varphi_k(x) = \frac{(-1)^k}{(x+k)^2}.$$

1. Montrer que la série de fonctions $\sum_{k\geqslant 0} \varphi_k$ converge simplement sur $]0,+\infty[$.

Dans tout le reste de cet exercice, on note $\varphi :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ la somme de la série $\sum_{k\geqslant 0} \varphi_k$.

2. Montrer que pour tout $x \in]0,+\infty[$, on a $\varphi(x+1)+\varphi(x) = \dfrac{1}{x^2}$.

3. En utilisant le théorème spécial des séries alternées, montrer que :

$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \left|\sum_{k=n+1}^{+\infty} \varphi_k(x)\right| \leqslant \frac{1}{(x+n+1)^2}.$$

4. Montrer que la fonction φ est une solution de (P).

B. Unicité de la solution

5. Montrer que si $f :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ est une solution de (P), alors pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a

$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad f(x) = (-1)^{n+1} f(x+n+1) + \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{(x+k)^2}.$$

6. En déduire que la fonction φ est l'unique solution de (P).

II. Étude de la solution du problème (P)

Dans cette partie, on étudie quelques propriétés de l'unique solution $\varphi :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ du problème (P).

1. **a)** Soit $\varepsilon > 0$. Montrer que la série de fonctions $\sum_{k\geqslant 0} \varphi_k$ converge uniformément sur $[\varepsilon,+\infty[$.

b) Montrer que la fonction φ est continue sur $]0,+\infty[$. En utilisant le fait que φ est une solution du problème (P), en déduire un équivalent simple de φ au voisinage de 0^+.

2. **a)** Justifier que la fonction φ est dérivable sur $]0,+\infty[$ et que l'on a

$$\forall x \in]0,+\infty[, \quad \varphi'(x) = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{2(-1)^{k+1}}{(x+k)^3}.$$

b) En déduire que la fonction φ est décroissante sur $]0,+\infty[$.

3. En utilisant le résultat de la question précédente, montrer que

$$\forall x \in]1,+\infty[, \quad \frac{1}{x^2} \leqslant 2\varphi(x) \leqslant \frac{1}{(x-1)^2}.$$

En déduire un équivalent de φ en $+\infty$.

III. Expression intégrale de la solution du problème (P)

Dans cette partie, on détermine une expression de φ sous la forme d'une intégrale. On considère un élément $x \in]0,+\infty[$.

1. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, montrer que la fonction $t \mapsto t^{x+k-1}\ln(t)$ est intégrable sur $]0,1]$ et que l'on a

$$\int_0^1 t^{x+k-1}\ln(t)\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{(x+k)^2}.$$

2. En déduire que la fonction $t \mapsto \dfrac{t^{x-1}\ln(t)}{1+t}$ est intégrable sur $]0,1]$ et que

$$\varphi(x) = -\int_0^1 \frac{t^{x-1}\ln(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t.$$

Fin