Équation différentielle linéaire d'ordre 2

Introduction

Dans ce problème, nous allons résoudre sur $]0,+\infty[$ l'équation différentielle suivante

$$x^2(1-x)y''-x(1+x)y'+y=2x^3. \qquad (E)$$

I. Solution particulière de l'équation homogène

Dans cette première partie, on souhaite déterminer les solutions développables en série entière de l'équation différentielle homogène

$$x^2(1-x)y''-x(1+x)y'+y=0. \qquad (H)$$

associée à (E). On considère une suite de nombres réels $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telle que la série entière $\sum a_n x^n$ ait un rayon de convergence $r>0$. On définit la fonction $f :]-r,r[\to\mathbb{R}$ par

$$\forall x\in\,]-r,r[,\quad f(x)=\sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

1. Justifier que f est de classe $\mathscr{C}^2$ et que les fonctions f' et f'' sont développables en série entière. Exprimer avec $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ les développements en série entière respectifs des fonctions f' et f'' en précisant leur rayon de convergence.

2. Montrer qu'il existe une suite $(b_n)_{n\geqslant 2}$ de nombres réels non nuls telle que

$$\forall x\in\,]-r,r[,\quad x^2(1-x)f''(x)-x(1+x)f'(x)+f(x)=a_0+\sum_{n=2}^{+\infty} b_n(a_n-a_{n-1})x^n.$$

3. Montrer que f est solution de (H) sur l'intervalle $]-r,r[$ si et seulement si $a_0=0$ et $a_{n+1}=a_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}^*$.

4. En déduire que si f est solution de (H) sur $]-r,r[$, alors $r\geqslant 1$ et il existe $\lambda\in\mathbb{R}$ tel que

$$\forall x\in\,]-1,1[,\quad f(x)=\frac{\lambda x}{1-x}.$$

5. Réciproquement, montrer que si $\lambda\in\mathbb{R}$, alors la fonction

$$g :]-1,1[\to\mathbb{R},\quad x\mapsto\frac{\lambda x}{1-x}$$

est une solution de (H) sur $]-1,1[$ développable en série entière.

II. Solutions de (E) sur $]0,1[$ ou $]1,+\infty[$

On désigne par I l'un des intervalles $]0,1[$ ou $]1,+\infty[$. Soit $y : I \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$. On définit la fonction $z : I \to \mathbb{R}$ par la relation

$$\forall x \in I, \quad z(x) = \left(\frac{1}{x} - 1\right) y(x).$$

1. Justifier que z est de classe $\mathscr{C}^2$ sur l'intervalle I, puis exprimer z' et z'' avec y, y' et y''.

2. Montrer que y est solution de (E) sur I si et seulement si z est solution sur I de l'équation différentielle

$$xz'' + z' = 2x. \qquad (E_1)$$

3. Montrer que z est solution de (E_1) sur I si et seulement si il existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall x \in I, \quad z'(x) = \frac{\lambda}{x} + x.$$

4. En déduire l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) sur I.

5. Déterminer l'ensemble des solutions de l'équation différentielle (E) sur $]0,+\infty[$.

Fin