Endomorphisme de multiplication matricielle

Introduction

Dans tout l'exercice, on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$.

Pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, on note $\varphi_A : \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ définie par $\varphi_A : M \mapsto AM$. En particulier, on remarque qu'en notant O_n la matrice nulle de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et I_n la matrice d'identité de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$, alors φ_{O_n} est l'endomorphisme nul de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ et φ_{I_n} est l'endomorphisme identité de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

L'objectif de cet exercice est d'étudier quelques propriétés de l'application φ_A.

I. Généralités

Dans cette partie, on démontre quelques propriétés générales de l'application φ_A.

1. Montrer pour tout $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ que l'application φ_A est un endomorphisme de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.
2. Montrer pour tout $(A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})^2$ que $\varphi_A \circ \varphi_B = \varphi_{AB}$.
3. Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Déduire de la question précédente que φ_A est un isomorphisme si et seulement si la matrice A est inversible. **Indication :** si φ_A est un isomorphisme, on pourra considérer un antécédent par φ_A de la matrice identité de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$.

II. Étude d'un exemple

Dans cette partie uniquement, on suppose que $n = 2$. On considère un nombre $a \in \mathbb{C}$ et la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C}).$$

1. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur le nombre $a \in \mathbb{C}$ pour que la matrice A soit diagonalisable.
2. Déterminer la matrice de φ_A dans la base $\mathscr{C} = \left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right)$ de $\mathscr{M}_2(\mathbb{C})$.
3. En déduire les valeurs propres de φ_A, puis déterminer la dimension de chaque sous-espace propre de φ_A en fonction de $a \in \mathbb{C}$.
4. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $a \in \mathbb{C}$ pour que φ_A soit diagonalisable.

III. Réduction de φ_A

Dans cette partie, on considère une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$. Nous allons étudier les propriétés liant les éléments propres de la matrice A et ceux de l'endomorphisme φ_A.

1. Montrer pour tout $k \in \mathbb{N}$ que $\varphi_A^k = \varphi_{A^k}$.

2. En déduire pour tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ que $P(\varphi_A) = \varphi_{P(A)}$.

3. Soit $P \in \mathbb{C}[X]$. Montrer que P est un polynôme annulateur de la matrice A si et seulement si P est un polynôme annulateur de l'endomorphisme φ_A.

4. Déduire de la question précédente que la matrice A est diagonalisable si et seulement si l'endomorphisme φ_A est diagonalisable.

5. On note χ_A le polynôme caractéristique de A.

  a) Montrer que $\chi_A(\varphi_A)$ est l'endomorphisme nul.

  b) Montrer que la matrice A et l'endomorphisme φ_A ont les mêmes valeurs propres.

6. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ une valeur propre de A. Montrer qu'une matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ est dans le sous-espace propre $E_\lambda(\varphi_A)$ de φ_A pour la valeur propre λ si et seulement si chaque colonne de la matrice M est dans le sous-espace propre $E_\lambda(A)$ de la matrice A pour la valeur propre λ.

On déduit directement de la question précédente que pour toute valeur propre $\lambda \in \mathbb{C}$ de la matrice A, l'application Ψ qui à toute matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ associe le n-uplet de ses colonnes

$$\Psi : \begin{pmatrix} m_{1,1} & \cdots & m_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ m_{n,1} & \cdots & m_{n,n} \end{pmatrix} \mapsto \left(\begin{pmatrix} m_{1,1} \\ \vdots \\ m_{n,1} \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} m_{1,n} \\ \vdots \\ m_{n,n} \end{pmatrix} \right)$$

est un isomorphisme du sous-espace propre de $E_\lambda(\varphi_A)$ sur $E_\lambda(A)^n$.

7. Dans le cas où la matrice A est diagonalisable, déduire des résultats de cette partie une expression du déterminant et de la trace de φ_A en fonction du déterminant et de la trace de A.

Fin