

Endomorphisme cyclique

Introduction

Dans ce problème, nous allons étudier la notion d'endomorphisme cyclique. Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. On rappelle que pour tout entier $p \in \mathbb{N}^*$, on note

$$f^0 = \text{Id}_E, \quad f^1 = f, \quad f^2 = f \circ f, \quad f^p = \underbrace{f \circ \dots \circ f}_{p \text{ fois}}.$$

On dit que f est cyclique s'il existe un vecteur $v \in E$ tel que la famille $(v, f(v), \dots, f^{n-1}(v))$ soit une base de l'espace vectoriel E .

Ce problème est composé de quatre parties indépendantes. Les trois premières sont consacrées à l'étude de différents exemples. Dans la dernière partie, on détermine une condition nécessaire et suffisante pour qu'un endomorphisme diagonalisable soit cyclique.

I. Étude d'un premier exemple

Dans cette partie, on considère l'endomorphisme $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ défini par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x, y) = (4x - 2y, x + y).$$

1. En considérant $v = (1, 0) \in \mathbb{R}^2$, montrer que f est un endomorphisme cyclique de \mathbb{R}^2 .
2. Déterminer les valeurs propres de f et donner une base de chaque sous-espace propre de f .
3. Existe-t-il un vecteur $w \in \mathbb{R}^2$ non nul tel que la famille $(w, f(w))$ ne soit pas une base de \mathbb{R}^2 ?

II. Étude d'un deuxième exemple

Dans cette partie, on considère l'endomorphisme $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$M = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

1. Montrer que la matrice M est diagonalisable et déterminer ses valeurs propres.
2. Montrer que l'on a la relation $g^2 = g + 2\text{Id}_{\mathbb{R}^3}$.
3. L'endomorphisme g est-il cyclique?

III. Étude d'un troisième exemple

Dans cette partie, on fixe un entier $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ et on considère l'application Δ définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad \Delta(P) = P(X+1) - P(X).$$

Par exemple, on a $\Delta(X^2) = (X+1)^2 - X^2 = 2X + 1$.

1. Montrer que Δ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Soit $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$. Calculer $\Delta(X^k)$ sous une forme développée.
3. En déduire que si $P \in \mathbb{R}_n[X]$ est un polynôme non constant, alors $\deg(\Delta(P)) = \deg(P) - 1$.
4. Montrer que l'endomorphisme Δ est cyclique.

IV. Cas d'un endomorphisme diagonalisable

Dans cette partie, on considère un endomorphisme diagonalisable h d'un \mathbb{C} -espace vectoriel E de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$. On souhaite déterminer une condition nécessaire et suffisante sur les valeurs propres de h pour que cet endomorphisme soit cyclique.

Comme l'endomorphisme h est diagonalisable, il existe une base $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ de l'espace vectoriel E composée de vecteurs propres de h . Pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$, on note $\lambda_k \in \mathbb{C}$ la valeur propre associée au vecteur propre v_k .

Soit $v \in E$. Comme \mathcal{B} est une base de E , il existe $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^n$ tel que

$$v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n.$$

1. Montrer que pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, on a

$$h^p(v) = \alpha_1 \lambda_1^p v_1 + \dots + \alpha_n \lambda_n^p v_n.$$

2. Montrer que le déterminant de la famille $\mathcal{F} = (v, h(v), \dots, h^{n-1}(v))$ dans la base \mathcal{B} est égal à

$$\det_{\mathcal{B}}(\mathcal{F}) = \alpha_1 \cdots \alpha_n \prod_{1 \leq i < j \leq n} (\lambda_j - \lambda_i).$$

3. Conclure que h est cyclique si et seulement si il admet n valeurs propres distinctes.

Fin