Le déterminant de Vandermonde

Introduction

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^n$, on définit la matrice de Vandermonde par

$$M(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ \alpha_1^1 & \alpha_2^1 & \cdots & \alpha_n^1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_1^{n-1} & \alpha_2^{n-1} & \cdots & \alpha_n^{n-1} \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$$

et le déterminant de Vandermonde par $\operatorname{Vand}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \det(M(\alpha_1, \dots, \alpha_n))$.

L'objectif de ce problème est de déterminer une expression explicite du déterminant de Vandermonde, puis d'utiliser ce résultat dans quelques applications.

I. Expression du déterminant de Vandermonde

Dans cette partie, on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et un élément $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^n$. Nous allons déterminer une expression explicite du déterminant de Vandermonde.

1. On suppose que $n = 2$. Déterminer une expression de $\operatorname{Vand}(\alpha_1, \alpha_2)$.

2. On suppose que $n = 3$. Déterminer une expression de $\operatorname{Vand}(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ sous une forme factorisée.

3. **Relation de récurrence.** On considère l'application $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{C}, \quad f(x) = \operatorname{Vand}(\alpha_1, \dots, \alpha_n, x).$$

a) Montrer que l'application f est polynômiale de degré au plus n.

b) Montrer que $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sont des racines de f.

c) En distinguant le cas où les éléments $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ sont deux à deux distincts du cas contraire, montrer que pour tout $x \in \mathbb{C}$, on a la relation

$$\operatorname{Vand}(\alpha_1, \dots, \alpha_n, x) = \operatorname{Vand}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \prod_{i=1}^{n} (x - \alpha_i).$$

4. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et tout $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^n$, on a

$$\operatorname{Vand}(\alpha_1, \dots, \alpha_n) = \prod_{1 \leqslant i < j \leqslant n} (\alpha_j - \alpha_i).$$

5. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur le n-uplet $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{C}^n$ pour que la matrice de Vandermonde $M(\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ soit inversible.

II. Une première application

Dans cette partie, on fixe un entier $n \in \mathbb{N}$, un polynôme $P \in \mathbb{C}_n[X]$ et un élément $(z_0, \dots, z_n) \in \mathbb{C}^{n+1}$. On souhaite déterminer une condition nécessaire et suffisante sur les objets précédents pour que la famille

$$\mathscr{F} = \big(P(X+z_0), P(X+z_1), \dots, P(X+z_n)\big)$$

soit une base de $\mathbb{C}_n[X]$. On note $\mathscr{C} = (1, X, \dots, X^n)$ la base canonique de $\mathbb{C}_n[X]$.

1. **Calcul d'un déterminant auxiliaire.** On considère une famille $(P_0, \dots, P_n)$ de polynômes de $\mathbb{C}_n[X]$ et on note $R \in \mathscr{M}_{n+1}(\mathbb{C})$ la matrice dont les coefficients $(r_{i,j})_{0 \leqslant i,j \leqslant n}$ sont donnés par

$$\forall (i,j) \in [\![0,n]\!]^2, \quad r_{i,j} = P_i(z_j).$$

   a) Montrer que $R = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(P_0, \dots, P_n)^\top \times M(z_0, \dots, z_n)$.

   b) En déduire que $\det(R) = \det_{\mathscr{C}}(P_0, \dots, P_n) \times \mathrm{Vand}(z_0, \dots, z_n)$.

2. **Déterminant de la famille $\mathscr{F}$ dans la base canonique.**

   a) On note $(m_{i,j})_{0 \leqslant i,j \leqslant n}$ les coefficients de la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(\mathscr{F})$. En utilisant la formule de Taylor pour les polynômes, montrer que l'on a l'égalité

$$\forall (i,j) \in [\![0,n]\!]^2, \quad m_{i,j} = \frac{P^{(i)}(z_j)}{i!}.$$

   b) Déduire des questions précédentes que l'on a

$$\det_{\mathscr{C}}(\mathscr{F}) = \frac{1}{1! \times 2! \times \cdots \times n!} \times \det_{\mathscr{C}}\left(P, P', \dots, P^{(n)}\right) \times \mathrm{Vand}(z_0, \dots, z_n).$$

3. **Conclusion.** Montrer que la famille $\mathscr{F}$ est une base de $\mathbb{C}_n[X]$ si et seulement si le polynôme P est de degré n et les nombres $z_0, \dots, z_n$ sont deux à deux distincts.

III. Une seconde application

Dans cette partie, on considère pour tout $\alpha \in \mathbb{C}$ la fonction $f_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f_\alpha : t \mapsto \exp(\alpha t)$.
On fixe également des nombres un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et des nombres $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$.

1. Soit $(\lambda_1, \dots, \lambda_n) \in \mathbb{C}^n$ tel que $\lambda_1 f_{\alpha_1} + \cdots + \lambda_n f_{\alpha_n} = 0$. Montrer que

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \lambda_1 \alpha_1^p + \cdots + \lambda_n \alpha_n^p = 0.$$

2. En déduire que la famille $(f_{\alpha_1}, \dots, f_{\alpha_n})$ est libre.

Fin