La dérivation discrète des polynômes

Introduction

Dans tout le problème, on fixe un entier $n \in \mathbb{N}^*$. On considère l'application de dérivation discrète Δ définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par $\Delta : P \mapsto P(X+1) - P(X)$. Par exemple, on a

$$\Delta\left(X^2\right) = (X+1)^2 - X^2 = 2X+1.$$

L'objectif de ce problème est d'établir quelques propriétés de la dérivation discrète, puis d'étudier deux applications où elle intervient.

I. Généralités sur l'application Δ

1. Montrer que Δ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. **a)** Soit $k \in [\![0, n]\!]$. Calculer $\Delta\left(X^k\right)$ sous une forme développée.

b) En déduire que si $P \in \mathbb{R}_n[X]$ est un polynôme non constant, alors $\deg(\Delta(P)) = \deg(P) - 1$.

3. Déduire de la question précédente $\mathrm{Ker}(\Delta)$ et $\mathrm{Im}(\Delta)$.

4. On considère l'endomorphisme T de $\mathbb{R}_n[X]$ défini par $T : P \mapsto P(X+1)$.

a) Pour tout $i \in \mathbb{N}$ et tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, donner une expression simple de $T^i(P)$.

b) En déduire que pour tout $k \in [\![0, n]\!]$ et tout $P \in \mathbb{R}_n[X]$, on a

$$\Delta^k(P) = \sum_{i=0}^{k} (-1)^{k-i} \binom{k}{i} P(X+i).$$

5. Dans cette question, on détermine les sous-espaces stables par l'endomorphisme Δ.

a) Montrer que $\mathbb{R}_d[X]$ est stable par Δ pour tout $d \in [\![0, n]\!]$.

Réciproquement, on considère un sous-espace vectoriel non nul F de $\mathbb{R}_n[X]$ stable par Δ. On fixe un polynôme $P_0 \in F$ de degré maximal, i.e. vérifiant $\deg(Q) \leqslant \deg(P_0) = d$ pour tout $Q \in F$.

b) Montrer que $\left(P_0, \Delta(P_0), \dots, \Delta^d(P_0)\right)$ est une famille libre d'éléments de F.

c) Conclure que $F = \mathbb{R}_d[X]$.

II. Les polynômes de Hilbert

On définit les polynômes de Hilbert $H_0, \dots, H_n \in \mathbb{R}[X]$ par $H_0 = 1$ et

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad H_k = \frac{1}{k!} \prod_{i=0}^{k-1} (X - i) = \frac{X(X-1)\cdots(X-k+1)}{k!}.$$

1. Montrer que $(H_0, \dots, H_n)$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

2. Calculer $\Delta(H_0)$. Montrer que pour tout $k \in [\![1, n]\!]$, on a $\Delta(H_k) = H_{k-1}$.

3. Soit $(k, \ell) \in [\![0, n]\!]^2$. En distinguant les cas $\ell > k$ et $\ell \leqslant k$, déterminer $\Delta^\ell(H_k)$.

4. Déduire des questions précédentes que l'on a

$$\forall P \in \mathbb{R}_n[X], \quad P = \sum_{k=0}^{n} \left[\Delta^k(P)(0)\right] H_k.$$

III. Application au calcul de séries numériques

Dans cette partie, on étudie les séries numériques de la forme $\sum_{i\geqslant 0} \frac{P(i)}{i!}$ avec $P \in \mathbb{R}[X]$. On pourra utiliser librement l'égalité $\mathrm{e} = \sum_{i=0}^{+\infty} \frac{1}{i!}$.

5. **a)** Soit $p \in \mathbb{N}$. Montrer que la série $\sum_{i\geqslant 0} \frac{i^p}{i!}$ est convergente.

b) En déduire que pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$, la série $\sum_{i\geqslant 0} \frac{P(i)}{i!}$ est convergente.

6. Montrer que pour tout $k \in [\![0,n]\!]$, on a $\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{H_k(i)}{i!} = \frac{\mathrm{e}}{k!}$.

7. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. D'après la question **II.1**, il existe $(\lambda_0,\dots,\lambda_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ tel que $P = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k H_k$.

Montrer que $\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{P(i)}{i!} = \mathrm{e} \sum_{k=0}^{n} \frac{\lambda_k}{k!}$.

8. **a)** Décomposer le polynôme $X^3 \in \mathbb{R}_3[X]$ dans la base (H_0, H_1, H_2, H_3).

b) En déduire la valeur de la somme $\sum_{i=0}^{+\infty} \frac{i^3}{i!}$.

IV. Polynômes à valeurs entières sur les entiers

Dans cette partie, on détermine une caractérisation des polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant $P(\mathbb{Z}) \subset \mathbb{Z}$.

1. Montrer pour tout $(k,a) \in [\![0,n]\!] \times \mathbb{Z}$ que $H_k(a) \in \mathbb{Z}$. On pourra distinguer les trois cas

$$(i)\ \ a \in [\![0,k-1]\!], \qquad (ii)\ \ a \geqslant k, \qquad (iii)\ \ a < 0.$$

2. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes.

(i) Pour tout $a \in \mathbb{Z}$, on a $P(a) \in \mathbb{Z}$.

(ii) Pour tout $a \in [\![0,n]\!]$, on a $P(a) \in \mathbb{Z}$.

(iii) Il existe $(\lambda_0,\dots,\lambda_n) \in \mathbb{Z}^{n+1}$ tel que $P = \sum_{k=0}^{n} \lambda_k H_k$.

Fin