La deltoïde

Introduction

On considère un plan affine euclidien orienté $\mathscr{P}$ muni d'un repère orthonormé direct $(O, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$ et la courbe paramétrée par la fonction vectorielle $f = (x, y) : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \left\{ \begin{array}{rcl} x(t) & = & 2\cos(t) + \cos(2t) \\ y(t) & = & 2\sin(t) - \sin(2t). \end{array} \right.$$

Cette courbe porte le nom de deltoïde. L'objectif de ce problème est de tracer et d'étudier quelques propriétés de cette dernière.

I. Tracé de la deltoïde

1. Justifier que l'on peut restreindre l'étude de la courbe paramétrée à $[0, \pi]$.

2. **a)** Justifier que x et y sont de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$, puis montrer que

$$\left\{t \in [0, \pi] \mid x'(t) = 0\right\} = \left\{0, \frac{2\pi}{3}, \pi\right\}, \qquad \left\{t \in [0, \pi] \mid y'(t) = 0\right\} = \left\{0, \frac{2\pi}{3}\right\}.$$

b) Dresser les tableaux de variation des fonctions x et y sur l'intervalle $[0, \pi]$.

3. **a)** Pour chaque $t \in \left\{0, \frac{2\pi}{3}, \pi\right\}$, déterminer un vecteur directeur de la tangente à la courbe paramétrée au point $M(t)$.

b) Déterminer une équation cartésienne de la tangente à la courbe au point $M\left(\frac{2\pi}{3}\right)$, puis vérifier qu'elle passe par l'origine du repère.

c) Déterminer la nature des points stationnaires $M(0)$ et $M\left(\frac{2\pi}{3}\right)$.

4. Tracer la courbe paramétrée par f.

II. Orthoptique de la deltoïde

Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on note $\mathscr{D}_t$ la tangente à la courbe paramétrée au point $M(t)$.

1. Soit $t \in \mathbb{R}$. Montrer que la droite $\mathscr{D}_t$ est dirigée par le vecteur de coordonnées $\left(-\cos\left(\frac{t}{2}\right), \sin\left(\frac{t}{2}\right)\right)$.

2. Soit $(s, t) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que les droites $\mathscr{D}_s$ et $\mathscr{D}_t$ sont orthogonales si et seulement si $t = s + \pi\ [2\pi]$.

3. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, le point $I(t)$ de coordonnées $\big(-\cos(2t), \sin(2t)\big)$ appartient à $\mathscr{D}_t$.

4. Déduire des questions précédentes l'orthoptique de la deltoïde, i.e. l'ensemble des points du plan par lesquels passent deux tangentes de la deltoïde orthogonales entre elles.

III. Propriétés métriques de la deltoïde

1. Montrer que pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a

$$\|f'(t)\| = 4\left|\sin\left(\frac{3t}{2}\right)\right|.$$

2. **a)** Montrer que la fonction $t \mapsto \|f'(t)\|$ est périodique de période $\frac{2\pi}{3}$.

b) En déduire la longueur de la deltoïde.

3. Soit $t \in \left]0, \frac{2\pi}{3}\right[$.

a) Déterminer la courbure $\gamma(t)$ de la courbe au point $M(t)$.

b) En déduire que le centre de courbure $\Omega(t)$ de la courbe au point $M(t)$ a pour coordonnées

$$\big(6\cos(t) - 3\cos(2t), 6\sin(t) + 3\sin(2t)\big).$$

Plus généralement, on désigne par $\Omega(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$ le point de coordonnées

$$g(t) = \big(6\cos(t) - 3\cos(2t), 6\sin(t) + 3\sin(2t)\big).$$

On peut vérifier que $\Omega(t)$ est le centre de courbure de la courbe paramétrée en tout point régulier $M(t)$.

4. Pour tout $t \in \mathbb{R}$, on note $z(t)$ l'affixe du point $M(t)$ et $\omega(t)$ l'affixe du point $\Omega(t)$.

a) Rappeler l'expression complexe de l'homothétie h de centre l'origine et de rapport 3.

b) Rappeler l'expression complexe de la rotation r de centre l'origine et d'angle $\theta = \frac{\pi}{3}$.

c) Montrer que $\Omega\left(t + \frac{\pi}{3}\right) = (h \circ r)(M(t))$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

d) Décrire une méthode de construction pour la courbe paramétrée par g.

Fin