Comparaison séries-intégrales et application au calcul de deux sommes

Introduction

Dans ce problème, on commence par démontrer une version alternative du théorème de comparaison séries-intégrales, puis on applique ce résultat pour établir la convergence et calculer la somme des séries numériques $\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n}{n}$ et $\sum_{n\geqslant 1}(-1)^n\frac{\ln(n)}{n}$.

I. Un résultat de comparaison séries-intégrales

On considère une fonction $f : [a,+\infty[\to \mathbb{R}$ continue, positive et décroissante avec $a \in \mathbb{N}$. On introduit la suite $(\Delta_n)_{n>a}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N} \text{ avec } n > a, \quad \Delta_n = \int_{n-1}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t - f(n).$$

1. Montrer que $0 \leqslant \Delta_n \leqslant f(n-1) - f(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ avec $n > a$.

2. En déduire que la série $\sum_{n>a}\Delta_n$ est convergente.

3. Conclure qu'il existe une constante $C \in \mathbb{R}$ telle que

$$\sum_{k=a}^{n} f(k) \underset{n\to+\infty}{=} \int_a^n f(t)\,\mathrm{d}t + C + o(1).$$

II. Application au calcul d'une première somme

Dans cette partie, on utilise le résultat de la première partie pour démontrer la convergence et calculer la somme de la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n}{n}$. On introduit les suites $(A_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad A_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k}{k} \quad \text{et} \quad H_n = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}.$$

1. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{(-1)^n}{n}$ converge.

2. Montrer qu'il existe une constante $\gamma \in \mathbb{R}$ telle que $H_n \underset{n\to+\infty}{=} \ln(n) + \gamma + o(1)$.

Le nombre γ s'appelle la **constante d'Euler**. On peut vérifier que l'on a $\gamma \approx 0,577$.

3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $A_{2n} = H_n - H_{2n}$.

4. En déduire la valeur de la somme $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-1)^n}{n}$.

III. Application au calcul d'une seconde somme

Dans cette partie, on utilise les résultats de la première partie pour démontrer la convergence et calculer la somme de la série $\sum_{n\geqslant 1}(-1)^n\frac{\ln(n)}{n}$. On introduit les suites $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(T_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad S_n=\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\frac{\ln(k)}{k}\quad\text{et}\quad T_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{\ln(k)}{k}.$$

On considère également la suite $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie dans la partie précédente.

1. Étudier la convergence absolue de la série $\sum_{n\geqslant 1}(-1)^n\frac{\ln(n)}{n}$.

2. Montrer qu'il existe une constante $\delta\in\mathbb{R}$ telle que

$$T_n \underset{n\to+\infty}{=} \frac{\ln^2(n)}{2}+\delta+o(1).$$

3. Montrer que pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, on a $S_{2n}=\ln(2)H_n+T_n-T_{2n}$.

4. Conclure que la série numérique $\sum_{n\geqslant 1}(-1)^n\frac{\ln(n)}{n}$ est convergente et exprimer sa somme en fonction de la constante d'Euler.

Fin