TD 15 Variables aléatoires discrètes

Partie I Révisions

I.A - Généralités

Exercice 1 : On lance deux dés tétraédriques équilibrés dont on note les résultats X et Y . On pose $D = X - Y$.

1. Déterminer la loi de D .
2. Déterminer l'espérance et la variance de D .

Exercice 2 : On considère un dé cubique truqué dont les faces sont numérotées de 1 à 6 et on note X la variable aléatoire donnée par le numéro de la face du dessus. On suppose que le dé est truqué de sorte que la probabilité d'obtenir une face est proportionnelle au numéro inscrit sur cette face.

1. Calculer la loi de X .
2. Calculer l'espérance et la variance de X .
3. Calculer l'espérance de $1/X$.

Exercice 3 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une entreprise souhaite recruter un employé parmi n candidats. Chacun d'entre eux passe à tour de rôle de manière indépendante un test, et le premier qui réussit le test est engagé. La probabilité de réussir le test est $p \in]0, 1[$. On définit la variable aléatoire X par $X = k$ si le k -ième candidat qui réussit le test est engagé, et $X = n + 1$ si personne n'est engagé.

1. Déterminer la loi de X .
2. Calculer l'espérance de X .

I.B - Couples de variables aléatoires

Exercice 4 : Une commode est constituée de trois tiroirs. On y range aléatoirement une chaussette verte, une rouge et une noire. On note X le nombre de chaussettes que contient le premier tiroir et N le nombre de tiroirs vides.

1. Déterminer la loi du couple (X, N) , puis la loi de X et la loi de N .
2. Les variables aléatoires X et N sont-elles indépendantes?

Exercice 5 : On lance deux dés tétraédriques équilibrés dont on note les résultats X et Y . On pose $U = \min(X, Y)$ et $V = \max(X, Y)$.

1. Déterminer la loi du couple (U, V) , puis la loi de U et la loi de V .
2. Calculer l'espérance de U et l'espérance de V .
3. Les variables aléatoires U et V sont-elles indépendantes?

Exercice 6 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère deux variables aléatoires X et Y telles que $X(\Omega) = Y(\Omega) = \llbracket 1, n \rrbracket$. On suppose qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall (i, j) \in \llbracket 1, n \rrbracket^2, \quad P((X = i) \cap (Y = j)) = aij.$$

1. Déterminer la valeur de a , puis la loi de X et l'espérance de X .
2. Les variables X et Y sont-elles indépendantes?
3. Calculer $P(X = Y)$.
4. Déterminer la loi de $M = \max(X, Y)$.

Exercice 7 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On dispose de n boîtes numérotées de 1 à n . La boîte k contient k boules numérotées de 1 à k . On choisit au hasard de façon équiprobable une boîte, puis une boule dans cette boîte. On note X le numéro de la boîte et Y le numéro de la boule.

1. Déterminer la loi du couple (X, Y) .
2. Déterminer la loi de X et la loi de Y .
3. Calculer l'espérance de X et de Y .

I.C - Variables aléatoires indépendantes

Exercice 8 : Déterminer la loi de $S = X + Y$ où X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi $\mathcal{U}(\llbracket 1, n \rrbracket)$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 9 : Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois uniformes sur $\llbracket 1, n \rrbracket$. On note $M = \max(X, Y)$.

1. Soit $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. Calculer $P(X \leq k)$.
2. Calculer les probabilités $P(X = Y)$, $P(X \leq Y)$ et $P(X \neq Y)$.
3. Calculer $P(M \leq k)$ pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$. En déduire la loi de M .

Exercice 10 : Soit $p \in]0, 1[$ et $(X_k)_{k \in \mathbb{N}^*}$ une suite de variables aléatoires indépendantes vérifiant $P(X_k = 1) = p$ et $P(X_k = -1) = 1 - p$.

1. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, déterminer la loi de $Z_n = X_1 \cdots X_n$.
2. Quelle est la limite de $P(Z_n = 1)$?

I.D - Covariance d'un couple de variables aléatoires

Exercice 11 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois uniformes sur $\llbracket 1, n \rrbracket$. On pose $U = \min(X, Y)$ et $V = \max(X, Y)$.

1. Déterminer la loi de U et la loi de V .
2. Calculer l'espérance de U et l'espérance de V .
3. Calculer la covariance de U et V .

Exercice 12 : Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$. Un sac contient n jetons numérotés de 1 à n . On tire successivement et sans remise deux jetons. On note X le numéro du premier jeton tiré et Y celui du second.

1. Déterminer la loi du couple de (X, Y) , la loi de X et la loi de Y .
2. Calculer la covariance de X et Y .
3. Déterminer la loi de $Z = |X - Y|$.

Partie II Variables aléatoires discrètes

Exercice 13 : Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ dont la loi est donnée par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P(X = n) = \frac{a}{n(n+1)}.$$

1. En utilisant une décomposition en éléments simples, déterminer a .
2. La variable aléatoire X est-elle d'espérance finie? Si oui, la calculer.

Exercice 14 : Soit $a \in \mathbb{R}$. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}^*$ dont la loi est donnée par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad P(X = n) = \frac{a}{n(n+1)(n+2)}.$$

1. En utilisant une décomposition en éléments simples, déterminer a .
2. La variable aléatoire X est-elle d'espérance finie? Si oui, la calculer.

Exercice 15 : Soit $p \in]0, 1[$. On dispose d'une pièce amenant « pile » avec la probabilité p . On lance cette pièce jusqu'à obtenir pour la deuxième fois « pile ». Soit X le nombre de « face » obtenus au cours de cette expérience.

1. Déterminer $P(X = n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. En déduire que X est presque sûrement fini.
3. Montrer que X est d'espérance finie, puis calculer là.

Exercice 16 : On lance une pièce équilibrée jusqu'à ce que celle-ci ait produit au moins une fois face et au moins une fois pile. On note T le nombre de lancer avant que le jeu s'arrête.

1. Déterminer $P(T = n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. En déduire que T est presque sûrement fini.
3. Montrer que T est d'espérance finie et calculer celle-ci.

Partie III Loi géométrique et loi de poisson

Exercice 17 : Soit X une variable aléatoire réelle. Calculer la probabilité que X soit pair dans chacun des cas suivants.

- Si X suit la loi $\mathcal{P}(\lambda)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.
- Si X suit la loi $\mathcal{G}(p)$ avec $p \in]0, 1[$.

Exercice 18 - Fonction de répartition : Soit X une variable aléatoire réelle.

- On suppose que X suit une loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$. Calculer les probabilités $P(X \leq n)$ et $P(X \geq n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
- Montrer que si X suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$, alors on a

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad P(X \leq n) = \frac{1}{n!} \int_{\lambda}^{+\infty} e^{-t} t^n dt.$$

Exercice 19 : Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant la loi géométrique de paramètre $p \in]0, 1[$.

- Déterminer la loi de $D = X - Y$.
- Déterminer la loi de $M = \min(X, Y)$.
- Étudier l'indépendance des variables aléatoires D et M .

Exercice 20 : Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois géométriques de paramètre $p \in]0, 1[$ et $q \in]0, 1[$. On note

$$A = \begin{pmatrix} X & 1 \\ 0 & Y \end{pmatrix}.$$

Calculer la probabilité que la matrice A soit diagonalisable.

Exercice 21 : Soit X une variable aléatoire réelle.

- Calculer l'espérance de X^{-1} si X suit la loi $\mathcal{G}(p)$ avec $p \in]0, 1[$.
- Calculer l'espérance de $(X + 1)^{-1}$ si X suit la loi $\mathcal{P}(\lambda)$ avec $\lambda \in \mathbb{R}_+^*$.

Partie IV Couples de variables aléatoires

Exercice 22 : Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}$ et $p \in]0, 1[$. On suppose qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}, \quad P((X = i) \cap (Y = j)) = \begin{cases} \binom{j}{i} a^i p(1-p)^j & \text{si } i \leq j \\ 0 & \text{si } i > j. \end{cases}$$

- Déterminer la valeur de a .
- Déterminer la loi de Y .
- Déterminer la loi de X en utilisant la relation

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad \frac{1}{(1-x)^{i+1}} = \sum_{j=i}^{+\infty} \binom{j}{i} x^{j-i}.$$

- Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes?

Exercice 23 : Soient X et Y deux variables aléatoires à valeurs dans $\mathbb{N}^*$. On suppose qu'il existe $a \in \mathbb{R}$ tel que

$$\forall (i, j) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*, \quad P((X = i) \cap (Y = j)) = \frac{a}{2^{i+j}}.$$

- Déterminer la valeur de a , puis la loi de X et l'espérance de X .
- Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes?

Exercice 24 : On suppose qu'une colonie d'insectes produit N œufs où N suit une loi de Poisson de paramètre $\lambda > 0$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, lorsque $(N = n)$, le nombre X d'œufs qui éclosent suit une loi binomiale de paramètre n et $p \in]0, 1[$.

- Déterminer la loi du couple (X, N) .
- Déterminer la loi de X .

Exercice 25 : Soient $X_1, \dots, X_n$ des variables aléatoires discrètes de variance finie. On définit la matrice de covariance de $(X_1, \dots, X_n)$ par

$$M = (\text{Cov}(X_i, X_j))_{1 \leq i, j \leq n}.$$

1. Exprimer la variance de $X = a_1 X_1 + \dots + a_n X_n$ avec $(a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$ en fonction de la matrice M .
2. En déduire que les valeurs propres de la matrice M sont toutes positives.

Partie V Fonctions génératrices

Exercice 26 : Une urne contient 4 boules rapportant respectivement 0, 1, 1 et 2 points. On y effectue $n \in \mathbb{N}^*$ tirages avec remise et l'on note S le score total obtenu. On désigne par X_k le nombre de points obtenus au tirage de rang $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.

1. Déterminer la fonction génératrice de X_k pour tout $k \in \llbracket 1, n \rrbracket$.
2. Déterminer la fonction génératrice de S .
3. En déduire la loi de S .

Exercice 27 : On définit $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad G(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2 + n + 1}{n!} t^n.$$

1. Déterminer le rayon de convergence de la série entière définissant G .
2. Exprimer G avec les fonctions usuelles.
3. Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose qu'il existe un nombre réel $\lambda > 0$ telle que la fonction génératrice de X vérifie $G_X = \lambda G$.
 - (a) Déterminer la valeur de λ et la loi de X .
 - (b) Montrer que X est de variance finie, puis calculer $E(X)$ et $V(X)$.

Exercice 28 : Soit X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{N}$. On suppose qu'il existe un réel $p \in]0, 1[$, un entier $n \in \mathbb{N}$ et un réel $a \in \mathbb{R}$ tels que

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad P(X = k) = a \binom{n+k}{k} p^k.$$

1. Calculer la fonction génératrice de X et en déduire la valeur de a .
2. En déduire l'espérance et la variance de X .

Exercice 29 : Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes. Calculer la loi de la variable aléatoire $S = X + Y$ dans chacun des cas suivants.

- (i) Si X suit la loi $\mathcal{B}(n, p)$ et Y suit la loi $\mathcal{B}(m, p)$ avec $(m, n, p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^* \times]0, 1[$.
- (ii) Si X suit la loi $\mathcal{P}(\lambda)$ et Y suit la loi $\mathcal{P}(\mu)$ avec $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$.
- (iii) Si X et Y suivent la loi $\mathcal{G}(p)$ et Y suit la loi $\mathcal{G}(p)$ avec $p \in]0, 1[$.