TD 1 Séries numériques

Partie I Révisions - Suites numériques

Exercice 1 : Étudier la convergences des suites de terme général suivant.

$$(i)\ \ u_n = \frac{\ln(n!)}{n^2},\quad (ii)\ \ u_n = \frac{\cos(n)+3\sin(n^2)}{\ln(n)},\quad (iii)\ \ u_n = \frac{3^n - \mathrm{e}^n}{4^n - n^2},$$

$$(iv)\ \ u_n = \sqrt[n]{n^2},\quad (v)\ \ u_n = \mathrm{e}^{-\sqrt{n}}\ln(1+n+\mathrm{e}^n),\quad (vi)\ \ u_n = \sqrt{n+1}-\sqrt{n}.$$

Exercice 2 : Soit $p \in \mathbb{R}_+^*$. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad u_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n^p + k^p}.$$

1. Montrer que si $p > 1$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ converge vers 0.
2. Montrer que si $p < 1$, alors la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ diverge vers $+\infty$.
3. Dans cette question, on suppose que $p = 1$.
   (a) Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ est croissante et qu'elle est convergente.
   (b) Déterminer la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 3 : On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad u_n = \sin\left((3+\sqrt{5})^n\pi\right) \quad \text{et} \quad v_n = \sin\left((3-\sqrt{5})^n\pi\right).$$

1. Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge.
2. Montrer que $(3+\sqrt{5})^n + (3-\sqrt{5})^n$ est un entier pair pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. En déduire la nature de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 4 : On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$u_0 = 2 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N},\quad u_{n+1} = 1 + \ln(u_n).$$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que $u_n \geqslant 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Étudier les variations de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. En déduire que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et préciser sa limite.

Exercice 5 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite définie par $u_0 = 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad u_{n+1} = \frac{3u_n + 2}{u_n + 4}.$$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est bien définie et que $u_n \geqslant 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N},\quad v_n = \frac{u_n - 1}{u_n + 2}.$$

   Montrer que la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite géométrique.
3. Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 6 : Déterminer la limite des suites de terme général suivant.

$$(i)\ \ \left(1+\frac{1}{n}\right)^n,\qquad (ii)\ \ \sqrt{n}\ln\left(\frac{\sqrt{n}+1}{\sqrt{n}-1}\right),\qquad (iii)\ \ \frac{\ln(n+1)-\ln(n)}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}.$$

Exercice 7 : On considère les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*,\quad u_n = S_n - 2\sqrt{n} \quad \text{et} \quad v_n = S_n - 2\sqrt{n+1} \quad \text{avec} \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

1. Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.
2. En déduire un équivalent de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 8 : Étudier la convergence des suites $(P_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad P_n=\prod_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{k^2}\right)\quad\text{et}\quad Q_n=P_n\left(1+\frac{1}{n}\right).$$

Exercice 9 : Déterminer un développement asymptotique à la précision n^{-1} de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad u_n=\int_0^1\frac{\mathrm{d}x}{1+x^n}.$$

Exercice 10 : On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0=0$ et

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad u_{n+1}=\frac{\mathrm{e}^{-u_n}}{n+1}.$$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
2. Montrer que l'on a le développement asymptotique

$$u_n=\frac{1}{n}-\frac{1}{n^2}+\frac{1}{2n^3}+o\left(\frac{1}{n^3}\right).$$

Exercice 11 : Déterminer une expression explicite des suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ suivantes.

(i) $u_0=1,\ u_1=-1$ et $2u_{n+2}=3u_{n+1}-u_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$,
(ii) $u_0=1,\ u_1=0$ et $u_{n+2}=4u_{n+1}-4u_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$,
(iii) $u_0=5,\ u_1=6$ et $u_{n+2}=6u_{n+1}-9u_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$,
(iv) $u_0=5,\ u_1=1$ et $u_{n+2}=-9u_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$,
(v) $u_0=0,\ u_1=1$ et $u_{n+2}=u_{n+1}+u_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$,
(vi) $u_0=1,\ u_1=2$ et $u_{n+2}=u_{n+1}-u_n$ pour tout $n\in\mathbb{N}$.

Exercice 12 : Soit $\theta\in\,]0,\pi[$. Déterminer une expression explicite de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par les conditions initiales $u_0=u_1=1$ et la relation

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad u_{n+2}=2\cos(\theta)u_{n+1}-u_n.$$

Partie II Séries numériques

Exercice 13 : Étudier la convergence des séries suivantes, puis en cas de convergence, calculer leur somme.

$$(i)\ \sum_{n\geqslant1}\frac{1}{n(n+1)},\qquad (ii)\ \sum_{n\geqslant1}\ln\left(\frac{n+1}{n}\right),$$
$$(iii)\ \sum_{n\geqslant2}\frac{1}{\sqrt{n-1}}-\frac{2}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{n+1}},\qquad (iv)\ \sum_{n\geqslant2}\ln\left(1-\frac{1}{n^2}\right).$$

Exercice 14 : On admet que $\mathrm{e}=\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{1}{n!}$. Monter la convergence des sommes suivantes et calculer leur somme.

$$(i)\ \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n+1}{n!},\qquad (ii)\ \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n^2-2}{n!},\qquad (iii)\ \sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n^3}{n!}.$$

Exercice 15 : Étudier la convergence des séries de terme général suivant.

$$(i)\ \frac{2n-1}{n^3+1},\qquad (ii)\ \frac{\sin(n)}{2^n},\qquad (iii)\ n\sin\left(\frac{1}{n}\right),$$
$$(iv)\ \frac{n^2}{(-4)^n},\qquad (v)\ 1-\cos\left(\frac{\pi}{n}\right),\qquad (vi)\ \mathrm{e}^{-\sqrt{n}},$$
$$(vii)\ n^n\mathrm{e}^{-n^2},\qquad (viii)\ n\cos(n)\sin\left(\frac{\pi}{n^3}\right),\qquad (ix)\ n^2\sin\left(\frac{\pi}{2^n}\right),$$
$$(x)\ \frac{\cos(n)}{n^3-n},\qquad (xi)\ \mathrm{e}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n,\qquad (xii)\ \frac{\ln(n)}{n^2},$$
$$(xiii)\ \frac{\ln^2(n)}{n},\qquad (xiv)\ \frac{2\cdot4\cdots(2n)}{n^n},\qquad (xv)\ \frac{1}{\ln(n)^{\ln(n)}}.$$

Exercice 16 : Étudier la convergence de la série de terme général défini par

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad u_n=\int_0^{\pi/n}\frac{\sin(t)}{1+t}\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 17 : Soit $a \in \mathbb{R}$. Étudier la convergence des séries

$$(i)\ \sum \frac{a^n}{1+a^{2n}}, \qquad (ii)\ \sum \frac{n!}{n^{an}}.$$

Exercice 18 : Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \ln(n) + a\ln(n+1) + b\ln(n+2).$$

1. Pour quelle valeur de $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, la série $\sum u_n$ converge-t-elle ?
2. Dans ce cas, calculer la somme $\sum u_n$.

Exercice 19 : Pour quelles valeurs de $a \in \mathbb{R}$, la série de terme général u_n défini ci-dessous converge-t-elle ?

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \sqrt[3]{n^3+an} - \sqrt{n^2+3}.$$

Exercice 20 : On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_n = \int_0^{\pi/4} \tan^n(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
2. Calculer $u_n + u_{n+2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. Étudier la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et de la série $\sum u_n$.

Exercice 21 : Soient $\sum u_n$ et $\sum v_n$ deux séries à termes strictement positifs convergentes. Montrer que les séries suivantes sont convergentes.

$$(i)\ \sum \max(u_n, v_n), \quad (ii)\ \sum \sqrt{u_n v_n}, \quad (iii)\ \sum \frac{u_n v_n}{u_n + v_n}.$$

Exercice 22 : Soit (u_n) une suite de réels positifs. On note

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = \frac{u_n}{1+u_n}.$$

Montrer que $\sum u_n$ est convergente si et seulement si $\sum v_n$ est convergente.

Partie III Comparaison série-intégrale

Exercice 23 : Soit $a \in \mathbb{R}\backslash\{1\}$. En utilisant une comparaison série - intégrale, étudier la convergence des séries suivantes.

$$(i)\ \sum \frac{1}{n\ln(n)}, \quad (ii)\ \sum \frac{1}{n\ln^a(n)}, \quad (iii)\ \sum \frac{1}{n\ln(n)\ln(\ln(n))}.$$

Exercice 24 : En utilisant une comparaison série - intégrale, déterminer un équivalent des suites suivantes.

$$(i)\ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}, \qquad (ii)\ \sum_{k=1}^{n} \ln(k), \qquad (iii)\ \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^2}, \qquad (iv)\ \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt[3]{k}},$$

$$(v)\ \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k\sqrt{k}}, \quad (vi)\ \sum_{k=1}^{n} \ln^2(k), \quad (vii)\ \sum_{k=1}^{n} \frac{\ln(k)}{k}, \quad (viii)\ \sum_{k=n+1}^{2n} \sqrt{k}.$$

Exercice 25 : Pour $a \in \mathbb{R}$, on note

$$S(a) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{a}{n^2+a^2}.$$

1. Montrer que la série définissant $S(a)$ est convergente.
2. Pour tout $a > 0$, encadrer $S(a)$ avec une comparaison série-intégrale.
3. En déduire la limite de $S(a)$ lorsque $a \to +\infty$.

Exercice 26 : Soient la fonction $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ et la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = \frac{\sin(\ln(x))}{x} \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad u_n = \int_{n-1}^{n} f(t)\,\mathrm{d}t - f(n).$$

1. Montrer que la série de terme général u_n converge.
2. Montrer que la suite $(\cos(\ln(n)))_{n\in\mathbb{N}^*}$ diverge.
3. En déduire que $\sum f(n)$ est divergente.

Partie IV Séries alternées

Exercice 27 : Étudier la convergence des séries suivantes.

$$(i)\ \sum \frac{(-1)^n}{\ln(n)}, \qquad (ii)\ \sum \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{2n+1}\right), \qquad (iii)\ \sum \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right),$$
$$(iv)\ \sum \frac{(-1)^n}{(-1)^n+\sqrt{n}}, \qquad (v)\ \sum \sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right), \qquad (vi)\ \sum \frac{(-1)^n}{\sqrt[n]{n!}}.$$

Exercice 28 : Pour quelles $(a,b)\in\mathbb{R}^2$, la série de terme général u_n défini par

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad u_n=\cos\left(\pi\sqrt{n^2+an+b}\right)$$

est-elle convergente ?

Exercice 29 : On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad u_n=\int_0^1 t^n\sin(\pi t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que la série $\sum(-1)^n u_n$ est convergente.
2. Montrer que l'on a l'égalité

$$\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n u_n=\int_0^1\frac{\sin(\pi t)}{1+t}\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 30 : On considère la suite $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad R_n=\sum_{k=n+1}^{+\infty}\frac{(-1)^k}{k^2}.$$

1. Montrer que la série $\sum R_n$ est convergente.
2. Calculer la somme $\sum_{n=0}^{+\infty}R_n$.

Partie V Produit de Cauchy

Exercice 31 : En utilisant un produit de Cauchy, justifier la convergence et calculer la somme de la série

$$\sum_{n\geqslant 0}\frac{n+1}{3^n}.$$

Exercice 32 : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite numérique telle que $\sum u_n$ converge absolument. On considère la suite $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad v_n=\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}2^k u_k.$$

Montrer que $\sum v_n$ converge et exprimer sa somme en fonction de celle de $\sum u_n$.

Exercice 33 : On considère la fonction $f:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ définie par $f:z\mapsto\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{z^n}{n!}$.

1. Montrer que la fonction f est définie sur $\mathbb{C}$.
2. Montrer que $f(z+\omega)=f(z)f(\omega)$ pour tout $(z,\omega)\in\mathbb{C}^2$.

Partie VI Pour aller plus loin

Exercice 34 - Développement asymptotique de la série harmonique : On considère les suites $(H_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$, $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définies par

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad H_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k},\quad u_n=H_n-\ln(n),\quad v_n=H_n-\ln(n+1).$$

1. Montrer que les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ sont adjacentes.
2. En déduire qu'il existe une constante $\gamma\in\mathbb{R}$ telle que $H_n=\ln(n)+\gamma+o(1)$.
3. Justifier que la série $\sum_{n\geqslant 1}\frac{1}{n(2n-1)}$ est convergente et calculer sa somme.