Mathématiques
PT
Lycée Couffignal

CHAPITRE 1

Séries numériques

Plan du chapitre

Introduction

L'objet de l'étude des séries numériques est de donner un sens à des sommes infinies de nombres réels ou de nombres complexes. Les premières traces d'utilisation d'une somme infinie remontent à l'antiquité lorsque Archimède a calculé l'aire de la surface comprise entre une parabole et une de ses cordes par la méthode d'exhaustion. Ce dernier a implicitement démontré la relation

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{4^n} = \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{64} + \frac{1}{256} + \cdots = \frac{1}{3}.$$

Au cours du XIVe siècle, Nicolas Oresme démontre que la série harmonique est divergente, ce que l'on peut reformuler intuitivement par

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots = +\infty.$$

À la même époque, le mathématicien indien Madhava de Sangamagrama est le premier à considérer des développements de fonctions trigonométriques sous forme de série. Par exemple, il a calculé les onze premières décimales du nombre π en établissant la formule

$$\forall x \in [-1,1], \quad \mathrm{Arctan}(x) = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Au XVIIe siècle, ces résultats sont redécouverts en Europe par James Gregory. Finalement, en donnant la construction générale des séries portant son nom, Brook Taylor établit en 1715 un lien fructueux avec le calcul différentiel.

En mathématiques, la notion de série permet notamment de définir des nombres et des fonctions en utilisant une somme infinie. Nous étudierons par exemple les séries entières dans un chapitre ultérieur. Elles sont aussi nécessaires pour donner un cadre formel aux séries de Fourier qui sont importantes en physique et en science de l'ingénieur : elles permettent de décomposer un signal périodique en une superposition de signaux sinusoïdaux.

Dans ce chapitre, nous commencerons par faire quelques rappels de première année sur les séries numériques. Ensuite, nous introduirons de nouveaux outils pour étudier les séries numériques.

Dans tout le chapitre, on désigne par $\mathbb{K}$ le corps $\mathbb{R}$ ou le corps $\mathbb{C}$.

Partie I Généralités sur les séries

Dans cette partie, on considère une suite $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

I.A - Convergence d'une série numérique

Définition (Série numérique) : La série de terme général u_n, notée $\sum u_n$, est la suite $(S_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k = u_0 + \cdots + u_n.$$

La suite (S_n) est appelée la suite des sommes partielles de la série $\sum u_n$.

Définition (Série convergente et divergente) : On dit que la série $\sum u_n$ est convergente si sa suite des sommes partielles (S_n) est convergente. Dans le cas contraire, on dit que la série est divergente.

Définition (Somme et reste d'une série) : Si $\sum u_n$ est une série convergente, alors

(i) On appelle somme de la série sa limite S et on note $S = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

(ii) Le reste d'ordre $n \in \mathbb{N}$ de la série est le nombre $R_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} u_k$.

Remarques 1 :

a) Si la suite (u_n) n'est que définie à partir de l'indice $p \in \mathbb{N}$, on note $\sum_{n\geqslant p} u_n$ la série de terme général u_n.

b) Si la série $\sum_{n\geqslant p} u_n$ est convergente, sa somme est notée $\sum_{n=p}^{+\infty} u_n$.

c) La convergence d'une série ne dépend pas de ses premiers termes.

Exemples 1 :

a) La série $\sum_{n\geqslant 0} n$ est divergente, car pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$S_n = \sum_{k=0}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.$$

b) La série $\sum_{n\geqslant 1} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right)$ est convergente et $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n}} - \frac{1}{\sqrt{n+1}}\right) = 1$, car pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{\sqrt{k}} - \frac{1}{\sqrt{k+1}}\right) = 1 - \frac{1}{\sqrt{n+1}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1.$$

c) La série $\sum_{n\geqslant 1} \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ est divergente car pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a

$$\sum_{k=1}^{n} \ln\left(1 + \frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \left(\ln(k+1) - \ln(k)\right) = \ln(n+1) - \ln(1) \xrightarrow[n\to+\infty]{} +\infty.$$

Proposition 1 : Si la série $\sum u_n$ converge, alors la suite (u_n) converge vers 0.

Définition (Divergence grossière) : Si la suite (u_n) ne converge pas vers 0, on dit que la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.

Exemple 2 : La série $\sum_{n\geqslant 0} (-1)^n$ diverge grossièrement.

ATTENTION : La réciproque est fausse ! La suite (u_n) définie dans l'exemple 1c) converge vers 0, mais nous avons montré que $\sum u_n$ est divergente.

Proposition (Linéarité de la somme) : Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ et $(v_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ une suite. Si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ sont convergentes, alors la série $\sum(\lambda u_n + \mu v_n)$ est convergente et on a la relation

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (\lambda u_n + \mu v_n) = \lambda \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right) + \mu \left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right).$$

I.B - Séries télescopiques

Définition (Série télescopique) : On appelle série télescopique toute série de la forme $\sum(u_{n+1}-u_n)$.

Proposition (Convergence d'une série télescopique) : La série télescopique $\sum(u_{n+1}-u_n)$ converge si et seulement si la suite (u_n) converge. Dans ce cas, on a pour tout $n_0 \in \mathbb{N}$ l'égalité

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty}(u_{n+1}-u_n) = \lim_{n\to+\infty} u_n - u_{n_0}.$$

Exemple 3 : Comme $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, la série $\sum\limits_{n\geqslant 1}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$ est convergente et on a $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right) = 1-0 = 1$.

I.C - Séries géométriques

On rappelle que pour tout $q \in \mathbb{C}$ et pour tout $(n_0, n) \in \mathbb{N}^2$ avec $n \geqslant n_0$, on a

$$\sum_{k=n_0}^{n} q^k = \begin{cases} q^{n_0}\dfrac{1-q^{n-n_0+1}}{1-q} & \text{si} \quad q \neq 1 \\ n-n_0+1 & \text{si} \quad q = 1. \end{cases}$$

Définition (Série géométrique) : Pour tout $q \in \mathbb{C}$, la série $\sum q^n$ s'appelle la série géométrique de raison q.

Proposition (Convergence d'une série géométrique) : Soit $q \in \mathbb{C}$. La série géométrique $\sum q^n$ converge si et seulement si on a l'inégalité $|q| < 1$. Dans ce cas, on a pour tout $n_0 \in \mathbb{N}$ l'égalité

$$\sum_{n=n_0}^{+\infty} q^n = \frac{q^{n_0}}{1-q}.$$

Exemple 4 : Le série $\sum\limits_{n\geqslant 0}\left(\frac{1}{2}\right)^n$ est convergente et sa somme est $\sum\limits_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}\right)^n = 2$.

Partie II Séries à termes positifs

II.A - Règles de comparaisons

Lemme 1 : Soit $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ une suite positive. La série $\sum u_n$ est convergente si et seulement si sa suite des sommes partielles est majorée.

Si $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et $(v_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ sont deux suites, on rappelle que l'on dit que la suite (u_n) est dominée par la suite (v_n), ce que l'on note $u_n = O(v_n)$, si

$$\exists K \in \mathbb{R}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad |u_n| \leqslant K|v_n|.$$

Si la suite (v_n) ne s'annule pas à partir d'un certain rang, la définition ci-dessus est équivalente à dire que le quotient (u_n/v_n) est une suite bornée.

Théorème de comparaison : Soient $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $(v_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ deux suites positives.

(i) Si $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors la convergence de $\sum v_n$ implique celle de $\sum u_n$.

(ii) Si $u_n = O(v_n)$, alors la convergence de $\sum v_n$ implique celle de $\sum u_n$.

(iii) Si $u_n \underset{+\infty}{\sim} v_n$, alors la convergence de $\sum v_n$ équivaut à celle de $\sum u_n$.

Remarques 2 :

a) Sous l'hypothèse du (i), on a en plus l'inégalité $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} v_n$.

b) Sous l'hypothèse du (i) ou du (ii), on a par contraposition que la divergence de $\sum u_n$ implique celle de $\sum v_n$.

c) L'assertion (i) reste valable si l'inégalité $0 \leqslant u_n \leqslant v_n$ n'est que vérifiée à partir d'un certain rang.

d) L'assertion (ii) reste valable si on remplace $u_n = O(v_n)$ par $u_n = o(v_n)$.

Exemples 5 :

a) On souhaite étudier la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 0} \mathrm{e}^{\cos(n)-n}$. On remarque que l'on a l'inégalité

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant \mathrm{e}^{\cos(n)-n} \leqslant \mathrm{e}^{1-n} = \mathrm{e} \cdot \mathrm{e}^{-n}$$

et que $\sum \mathrm{e}^{-n}$ est une série géométrique convergente, donc la série $\sum_{n\geqslant 0} \mathrm{e}^{\cos(n)-n}$ converge par comparaison.

b) On souhaite étudier la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\ln(n)}{n^3}$. Par croissance comparée, on remarque que

$$n^2\left(\frac{\ln(n)}{n^3}\right) = \frac{\ln(n)}{n} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\ln(n)}{n^3} = o\left(\frac{1}{n^2}\right).$$

Comme $\sum \frac{1}{n^2}$ est une série de Riemann convergente, on conclut que $\sum_{n\geqslant 1} \frac{\ln(n)}{n^3}$ converge par comparaison de séries à termes positifs.

c) On souhaite étudier la convergence de la série $\sum \sin\left(2^{-n}\right)$. On remarque que l'on a l'équivalent

$$\sin\left(2^{-n}\right) \underset{+\infty}{\sim} 2^{-n} \geqslant 0$$

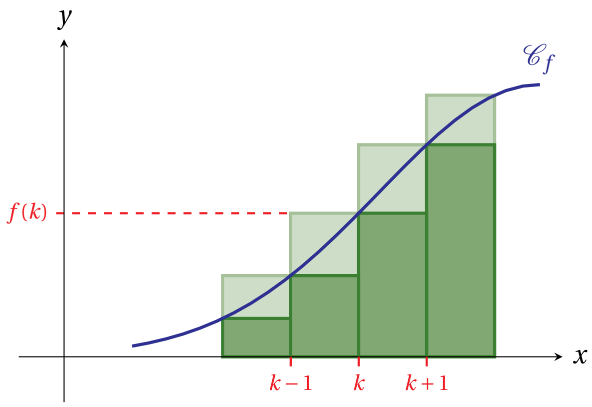
et que $\sum 2^{-n}$ est une série géométrique convergente, donc la série $\sum \sin\left(2^{-n}\right)$ converge par comparaison.

II.B - Méthode - Comparaison série-intégrale

Dans cette partie, on considère une fonction $f : [a, +\infty[\to \mathbb{R}$ continue et monotone où $a \in \mathbb{R}$. Nous allons voir une méthode permettant d'obtenir des encadrements de sommes dont le terme général est de la forme $f(n)$.

Pour commencer, on détermine un encadrement du terme général de la somme en distinguant deux cas selon les variations de la fonction f.

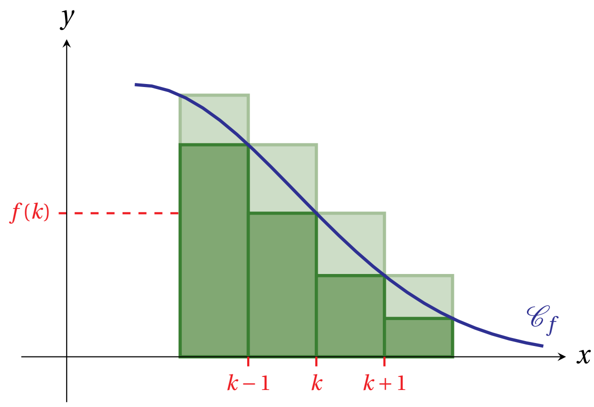
Cas d'une fonction croissante



Dans ce cas, on en déduit que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ vérifiant $k \geqslant a+1$, on a l'inégalité

$$\int_{k-1}^{k} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(k) \leqslant \int_{k}^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Cas d'une fonction décroissante



Dans ce cas, on en déduit que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ vérifiant $k \geqslant a+1$, on a l'inégalité

$$\int_{k}^{k+1} f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant f(k) \leqslant \int_{k-1}^{k} f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Il suffit ensuite d'additionner l'inégalité précédente pour les valeurs adéquates de l'indice k pour obtenir un encadrement de la somme étudiée.

La méthode de comparaison série-intégrale permet d'étudier la convergence de certaines séries numériques.

Exemple 6 : On souhaite déterminer la nature de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{1}{n^2+1}$. Pour ce faire, nous allons encadrer sa suite des sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui est définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k^2+1}.$$

La fonction $f : t \mapsto \dfrac{1}{t^2+1}$ est continue et décroissante sur $[0, +\infty[$, donc on a l'encadrement

$$\forall k \in \mathbb{N}^*, \quad \int_{k}^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} \leqslant \frac{1}{k^2+1} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on obtient en sommant ces inégalités pour $k \in [\![1, n]\!]$ que

$$\int_{1}^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1} \leqslant \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2+1} \leqslant \int_{0}^{n} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+1}.$$

En calculant ces intégrales, on aboutit pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ à l'inégalité

$$\mathrm{Arctan}(n+1) - \frac{\pi}{4} \leqslant S_n - 1 \leqslant \mathrm{Arctan}(n) \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Arctan}(n+1) - \frac{\pi}{4} + 1 \leqslant S_n \leqslant \mathrm{Arctan}(n) + 1.$$

Comme la fonction Arctan est majorée par $\dfrac{\pi}{2}$, on en déduit que la suite des sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est majorée par le réel $\dfrac{\pi}{2} + 1$. Comme $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{1}{n^2+1}$ est une série à termes positifs, on conclut qu'elle converge.

Exemple 7 : On souhaite déterminer la nature de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{\sqrt{n}}$. Pour ce faire, nous allons encadrer sa suite des sommes partielles $(S_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ qui est définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}}.$$

La fonction $f : t \mapsto \frac{1}{\sqrt{t}}$ est continue et décroissante sur $[1, +\infty[$, donc on a l'encadrement

$$\forall k \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}, \quad \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{k}} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$, on obtient en sommant ces inégalités pour $k \in [\![2, n]\!]$ que

$$\int_2^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}} \leqslant \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{\sqrt{k}} \leqslant \int_1^{n} \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}.$$

En calculant ces intégrales, on aboutit pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ à l'inégalité

$$2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{2} \leqslant S_n - 1 \leqslant 2\sqrt{n} - 2 \qquad \Leftrightarrow \qquad 2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{2} + 1 \leqslant S_n \leqslant 2\sqrt{n} - 1.$$

On en en déduit par minoration que $\lim_{n\to+\infty} S_n = +\infty$, donc la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{1}{\sqrt{n}}$ diverge.

Définition (Série de Riemann) : On appelle série de Riemann toute série de la forme $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$.

En appliquant la méthode de comparaison série-intégrale, on en déduit le résultat suivant.

Théorème (Convergence d'une série de Riemann) : Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La série de Riemann $\sum_{n\geqslant 1} \frac{1}{n^\alpha}$ converge si et seulement si $\alpha > 1$.

La méthode de comparaison série-intégrale permet aussi d'obtenir des équivalents de certaines sommes.

Exemple 8 : En reprenant l'exemple précédent, on a pour tout $n \in\in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ l'encadrement

$$\frac{2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{2} + 1}{2\sqrt{n}} \leqslant \frac{S_n}{2\sqrt{n}} \leqslant \frac{2\sqrt{n} - 1}{2\sqrt{n}}.$$

Comme on a les égalités

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2\sqrt{n+1} - 2\sqrt{2} + 1}{2\sqrt{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2\sqrt{n} - 1}{2\sqrt{n}} = 1,$$

on conclut par le théorème d'encadrement que

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{S_n}{2\sqrt{n}} = 1 \quad \Leftrightarrow \quad S_n \underset{n\to+\infty}{\sim} 2\sqrt{n}.$$

Exemple 9 : On souhaite déterminer un équivalent de la suite $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad R_n = \sum_{k=n+1}^{+\infty} \frac{1}{k^3}.$$

La fonction $f : t \mapsto \dfrac{1}{t^3}$ est continue et décroissante sur $[1, +\infty[$, donc on a l'encadrement

$$\forall k \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}, \quad \int_k^{k+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^3} \leqslant \frac{1}{k^3} \leqslant \int_{k-1}^{k} \frac{\mathrm{d}t}{t^3}.$$

Pour tout $(n, N) \in \mathbb{N}^2$ vérifiant $1 \leqslant n \leqslant N$, on obtient en sommant ces inégalités pour $k \in [\![n+1, N]\!]$ que

$$\int_{n+1}^{N+1} \frac{\mathrm{d}t}{t^3} \leqslant \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^3} \leqslant \int_{n}^{N} \frac{\mathrm{d}t}{t^3} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2(n+1)^2} - \frac{1}{2(N+1)^2} \leqslant \sum_{k=n+1}^{N} \frac{1}{k^3} \leqslant \frac{1}{2n^2} - \frac{1}{2N^2}.$$

En passant à la limite lorsque $N \to +\infty$, on obtient pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ que

$$\frac{1}{2(n+1)^2} \leqslant R_n \leqslant \frac{1}{2n^2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{n^2}{(n+1)^2} \leqslant 2n^2 R_n \leqslant 1.$$

En appliquant le théorème d'encadrement, on conclut que l'on a $R_n \underset{+\infty}{\sim} \dfrac{1}{2n^2}$.

Partie III Séries alternées

On dit qu'une série $\sum a_n$ est alternée si $a_n = (-1)^n |a_n|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ ou si $a_n = (-1)^{n+1}|a_n|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Théorème des séries alternées : Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels.

(i) Si $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante et converge vers 0, alors la série $\sum (-1)^n u_n$ converge.

(ii) Dans ce cas, si on note $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite des sommes partielles de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} (-1)^n u_n$, on a

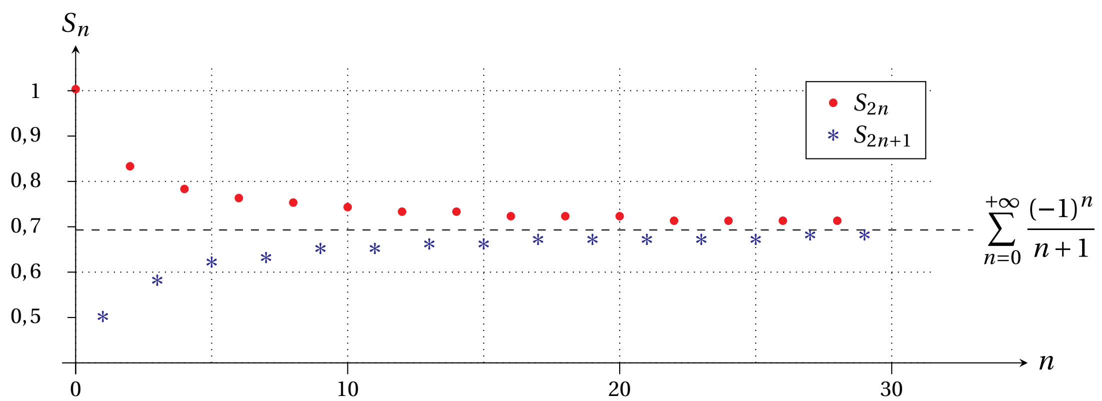
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad S_{2n+1} \leqslant \sum_{k=0}^{+\infty} (-1)^k u_k \leqslant S_{2n}.$$

Remarque 3 : Sous les hypothèses du théorème, on déduit de (ii) la majoration suivante du reste de la série.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \left| \sum_{k=n}^{+\infty} (-1)^k u_k \right| \leqslant u_n.$$

Exemple 10 : La série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \dfrac{(-1)^n}{n+1}$ est convergente d'après le théorème des séries alternées.

Illustration : On peut représenter la suite des sommes partielles de la série précédente.



Partie IV Séries absolument convergentes

IV.A - Convergence absolue

Dans cette partie, on considère une suite $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

Définition (Convergence absolue) : On dit que la série $\sum u_n$ converge absolument si la série $\sum |u_n|$ converge.

Théorème 1 : Si une série numérique converge absolument, alors elle converge.

Exemple 11 : On souhaite étudier la convergence de la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \sin(n)\mathrm{e}^{-n}$. On remarque que l'on a l'inégalité

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad 0 \leqslant \left|\sin(n)\mathrm{e}^{-n}\right| \leqslant \mathrm{e}^{-n}$$

et que $\sum \mathrm{e}^{-n}$ est une série géométrique convergente, donc la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \sin(n)\mathrm{e}^{-n}$ converge absolument par comparaison, donc elle converge.

ATTENTION : La réciproque du théorème précédent est fausse. Par exemple, la série $\sum\limits_{n\geqslant 0} \frac{(-1)^n}{n+1}$ converge d'après le théorème des séries alternées, mais elle ne converge pas absolument.

Proposition 2 (Inégalité triangulaire) : Si la série $\sum u_n$ converge absolument, alors on a l'inégalité

$$\left|\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right| \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} |u_n|.$$

IV.B - Règle de d'Alembert

Proposition (Règle de d'Alembert) : Soit $\sum u_n$ une série complexe à termes non nuls telle que

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \ell \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}.$$

(i) Si $\ell < 1$, alors la série $\sum u_n$ converge absolument.
(ii) Si $\ell > 1$, alors la série $\sum u_n$ diverge grossièrement.
(iii) Si $\ell = 1$, on ne peut pas conclure.

Exemples 12 :

a) On souhaite étudier la convergence de la série $\sum u_n$ où $u_n = n^2\mathrm{e}^{-n}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $u_n \neq 0$ et

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \frac{(n+1)^2\mathrm{e}^{-(n+1)}}{n^2\mathrm{e}^{-n}} = \frac{(n+1)^2\mathrm{e}^{-1}}{n^2} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \mathrm{e}^{-1} < 1,$$

donc la série $\sum u_n$ est convergente par la règle de d'Alembert.

b) La règle de d'Alembert ne permet pas de déterminer la nature des séries $\sum \frac{1}{n}$ et $\sum \frac{1}{n^2}$.

IV.C - Produit de Cauchy

Dans cette partie, on considère deux suites $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$ et $(v_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.

Définition (Produit de Cauchy) : Le produit de Cauchy des séries numériques $\sum u_n$ et $\sum v_n$ est la série de terme général w_n défini par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad w_n = \sum_{k=0}^{n} u_k v_{n-k}.$$

Théorème (Convergence du produit de Cauchy) : Si les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$ convergent absolument, alors leur produit de Cauchy $\sum w_n$ converge absolument et on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} u_n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} v_n\right).$$

DÉMONSTRATION (NON EXIGIBLE) :

On introduit (U_n), (V_n) et (W_n) les suites des sommes partielles associées respectivement aux séries de terme général u_n, v_n et w_n. On considère également les ensembles

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad C_n = [\![0, n]\!]^2, \qquad T_n = \left\{(i,j) \in \mathbb{N}^2 \mid i + j \leqslant n\right\}.$$

Cas des séries à termes positifs : On suppose que (u_n) et (v_n) sont deux suites de réels positifs. Dans ce cas, en remarquant que l'on a les inclusions $T_n \subset C_n \subset T_{2n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, on en déduit que

$$\sum_{(i,j)\in T_n} u_i v_j \leqslant \sum_{(i,j)\in C_n} u_i v_j \leqslant \sum_{(i,j)\in T_{2n}} u_i v_j \qquad \Leftrightarrow \qquad W_n \leqslant U_n V_n \leqslant W_{2n}.$$

Par hypothèse, les suites (U_n) et (V_n) sont croissantes et convergent respectivement vers $U \in \mathbb{R}$ et $V \in \mathbb{R}$. Ainsi, on déduit de l'inégalité précédente que la suite croissante (W_n) est majorée par UV, donc elle converge vers un nombre $W \in \mathbb{R}$. En passant à la limite dans l'inégalité précédente, on conclut que $W = UV$.

Cas général : On remarque qu'en utilisant l'inégalité triangulaire, on a

$$|U_n V_n - W_n| = \left|\sum_{(i,j)\in C_n \setminus T_n} u_i v_j\right| \leqslant \sum_{(i,j)\in C_n\setminus T_n} |u_i v_j| = \left(\sum_{i=0}^{n} |u_i|\right)\left(\sum_{j=0}^{n} |v_j|\right) - \sum_{k=0}^{n}\left(\sum_{i=0}^{k} |u_i||v_{k-i}|\right).$$

D'après le cas précédent, le membre de droite de l'inégalité ci-dessus converge vers 0, ce qui permet de conclure avec le théorème d'encadrement.

■

Exemple 13 : On souhaite étudier la série $\sum_{n\geqslant 0} \frac{n+1}{2^n}$. On remarque pour tout $n \in \mathbb{N}$ que

$$w_n = \frac{n+1}{2^n} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}\frac{1}{2^{n-k}}.$$

On en déduit que $\sum w_n$ est le produit de Cauchy de $\sum \frac{1}{2^n}$ avec elle-même. Cette dernière série convergeant absolument, donc on en déduit avec le théorème précédent que $\sum w_n$ converge et que l'on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} w_n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n}\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n}\right) = \left(\frac{1}{1-1/2}\right)^2 = 4.$$

Partie V Permutation des termes d'une série numérique ($\star$)

Dans cette partie qui n'est pas au programme, nous évoquons rapidement le problème de la permutation des termes dans une série numérique. Le résultat principal de cette partie motivera la définition de l'espérance d'une variable aléatoire que nous adopterons dans un chapitre ultérieur.

Lorsque l'on considère une somme finie d'éléments $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{K}$, l'ordre de sommation n'a aucune importance sur le résultat. Plus précisément, pour toute bijection $\sigma : [\![1,n]\!] \to [\![1,n]\!]$, on a l'égalité

$$\sum_{k=1}^{n} x_{\sigma(k)} = \sum_{k=1}^{n} x_k.$$

Malheureusement, cette propriété ne s'étend pas à la somme d'une série numérique en général. Par exemple, nous démontrerons que l'on a l'égalité

$$\ln(2) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k+2} + \cdots$$

Si on s'autorise à effectuer une permutation des termes de la somme ci-dessus, on obtient

$$\begin{aligned}\left(1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k}\right) + \cdots &= \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k}\right) + \cdots \\ &= \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2k-1} - \frac{1}{2k} + \cdots\right) = \frac{1}{2}\ln(2).\end{aligned}$$

Bien que les termes additionnés soient les mêmes, nous avons obtenus deux résultats différents.

Théorème 2 ($\star$) : Soit $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$. Si $\sum u_n$ est une série absolument convergente, alors pour toute application bijective $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, la série $\sum u_{\sigma(n)}$ converge absolument et on a $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)} = \sum_{n=0}^{+\infty} u_n$.

DÉMONSTRATION ADMISE

Remarque 4 : La série de l'exemple précédent ne converge pas absolument, donc le théorème ci-dessus ne s'applique pas.

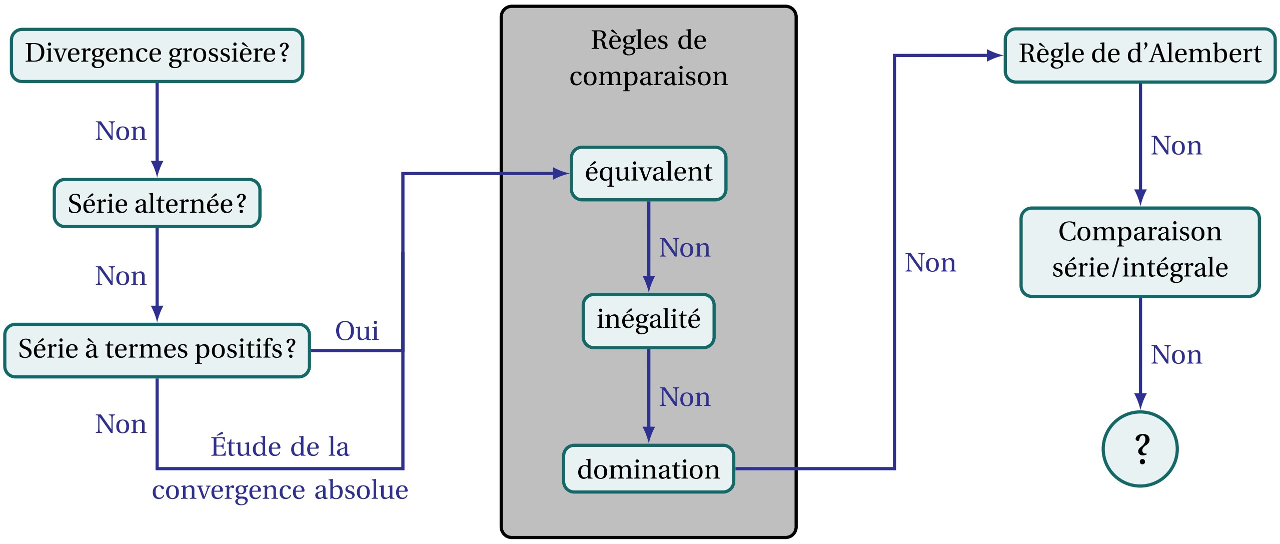
On dispose même du résultat surprenant ci-dessous.

Théorème de réarrangement de Riemann ($\star$) : Soit $\sum u_n$ une série convergente de nombres réels ne convergeant pas absolument. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, il existe une bijection $\sigma : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle $\sum u_{\sigma(n)}$ converge et $x = \displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} u_{\sigma(n)}$.

DÉMONSTRATION ADMISE

Partie VI Méthode - Étudier la convergence d'une série

Le graphe ci-dessous résume la démarche à suivre pour étudier la convergence d'une série $\sum u_n$ où $(u_n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$.



Si $\sum u_n$ n'est pas une série alternée, qu'elle n'est pas à termes positifs et que l'on a démontré qu'elle ne converge pas absolument, on sort du cadre du programme dans le cas général.