

TD 12 Séries entières

Partie I Rayon de convergence

Exercice 1 : Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes.

$$\begin{array}{lll}
 (i) \sum_{n \geq 0} \frac{n^2}{3^n} z^n, & (ii) \sum_{n \geq 0} e^{-n^2} z^n, & (iii) \sum_{n \geq 1} (-1)^n \frac{\ln(n)}{n^2} z^{2n}, \\
 (iv) \sum_{n \geq 0} \frac{n^n}{n!} z^{3n}, & (v) \sum_{n \geq 0} (-1)^n n! z^n, & (vi) \sum_{n \geq 0} \binom{2n}{n} z^{4n}, \\
 (vii) \sum_{n \geq 0} \frac{n+i}{2+i} z^{2n}, & (viii) \sum_{n \geq 1} \frac{(1+i)^n z^{3n}}{n 2^n}, & (ix) \sum_{n \geq 0} z^{n^2}.
 \end{array}$$

Exercice 2 : Soit $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite bornée de nombres complexes. Montrer que le rayon de convergence R de la série entière $\sum_{n \geq 0} p_n z^n$ vérifie $R \geq 1$.

Exercice 3 : On souhaite déterminer le rayon de convergence de la série entière

$$S = \sum_{n \geq 1} n^{(-1)^n} x^n.$$

1. La règle de d'Alembert permet-elle d'obtenir le rayon de convergence de S ?
2. Déterminer le rayon de convergence de la série entière S .

Exercice 4 : Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes.

$$(i) \sum_{n \geq 1} \left(\sqrt[n]{n+1} - \sqrt[n]{n} \right) x^n, \quad (ii) \sum_{n \geq 0} \cos\left(\pi \sqrt{n^2 + n + 1}\right) x^n.$$

Partie II Propriétés de la somme d'une série entière

Exercice 5 : On considère la fonction

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, \quad x \mapsto \begin{cases} \frac{\sin(x)}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 1 & \text{si } x = 0. \end{cases}$$

Montrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 6 : Montrer que la fonction $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $x \mapsto \frac{e^x - 1}{x}$ se prolonge à $\mathbb{R}$ en une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Exercice 7 : Montrer que la fonction $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \begin{cases} \operatorname{ch}(\sqrt{x}) & \text{si } x \geq 0 \\ \cos(\sqrt{-x}) & \text{si } x < 0. \end{cases}$$

est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$.

Exercice 8 : Montrer que la fonction $f:]-\pi, \pi[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(0) = 0$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f(x) = \frac{1}{\sin(x)} - \frac{1}{x}.$$

est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]-\pi, \pi[$.

Exercice 9 : Montrer que la fonction $f: \mathbb{R}^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f(x) = \int_x^{2x} \frac{\cos(t)}{t} dt.$$

se prolonge à $\mathbb{R}$ en une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$.

Partie III Calcul de sommes de séries entières

Exercice 10 : Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes, puis exprimer leur somme avec des fonctions usuelles.

$$(i) \sum_{n \geq 0} \frac{n-1}{n!} x^n, \quad (ii) \sum_{n \geq 0} \frac{n+2}{n+1} x^n, \quad (iii) \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^{n+1}}{2^n n!} x^{2n},$$

$$(iv) \sum_{n \geq 0} \frac{x^{2n}}{2n+1}, \quad (v) \sum_{n \geq 0} (-1)^{n+1} n x^{2n+1}, \quad (vi) \sum_{n \geq 0} \text{ch}(n) x^n.$$

Exercice 11 : Soit f la fonction d'une variable réelle définie par

$$f: x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} H_n x^n \quad \text{avec} \quad H_n = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

1. Déterminer le rayon de convergence R de la série entière définissant f .
2. Calculer $(1-x)f(x)$ pour tout $x \in]-R, R[$.
3. En déduire une expression de $f(x)$ pour tout $x \in]-R, R[$.

Exercice 12 : Soient $\theta \in \mathbb{R}$ et f la fonction d'une variable réelle définie par

$$f: x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin(n\theta)}{n!} x^n.$$

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Déterminer une expression de $f(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 13 : On considère la suite $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$F_0 = 0, \quad F_1 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad F_{n+2} = F_{n+1} + F_n.$$

Déterminer le rayon de convergence et la somme des séries entières suivantes.

$$(i) \sum_{n \geq 0} F_n x^n, \quad (ii) \sum_{n \geq 0} \frac{F_n}{n!} x^n.$$

Partie IV Développement en série entière

IV.A - Calculs de développements en série entière

Exercice 14 : Soit $a > 0$. Calculer le développement en série entière des fonctions suivantes et préciser leur rayon de convergence.

$$(i) a^x, \quad (ii) e^{a+x}, \quad (iii) \ln(a+x), \quad (iv) \frac{1}{a-x}.$$

Exercice 15 : Calculer le développement en série entière des fonctions suivantes et préciser leur rayon de convergence.

$$(i) e^x \cos(x), \quad (ii) \sin(x) \cos(x), \quad (iii) \sin^3(x),$$

$$(iv) \frac{1+x}{1-x}, \quad (v) \ln(x^2 - 3x + 2), \quad (vi) \frac{1}{x^2 + 5x + 6},$$

$$(vii) \frac{1}{x^2 + x + 1}, \quad (viii) \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}, \quad (ix) \ln(x^2 + x + 1).$$

Exercice 16 : Soit $(a, b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}^*$ vérifiant la condition $a \neq b$. On considère la fonction $f: \mathbb{C} \setminus \{a, b\} \rightarrow \mathbb{C}$ définie par

$$\forall z \in \mathbb{C} \setminus \{a, b\}, \quad f(z) = \frac{1}{(z-a)(z-b)}.$$

Montrer que la fonction ci-dessus est la somme d'une série entière dont on précisera le rayon de convergence en utilisant les deux méthodes ci-dessous.

- (i) Avec une décomposition en élément simple.
- (ii) Avec un produit de Cauchy.

Exercice 17 : Soit $p \in \mathbb{N}^*$. Calculer le développement en série entière en précisant le rayon de convergence de la fonction

$$x \mapsto \frac{1}{(x-1) \cdots (x-p)}.$$

Exercice 18 - Développement de la fonction sinus intégral : Calculer le développement en série entière en précisant le rayon de convergence de la fonction sinus intégral $\text{Si} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \text{Si}(x) = \int_0^x \frac{\sin(t)}{t} dt.$$

Exercice 19 - Développement de la fonction Arcsin :

1. Démontrer que

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad \frac{1}{\sqrt{1-x}} = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{4^n} \binom{2n}{n} x^n.$$

2. En déduire que Arcsin est développable en série entière et calculer son développement en série entière en précisant son rayon de convergence.

3. En déduire que l'on a la relation

$$\pi = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{3}{16^n (2n+1)} \binom{2n}{n}.$$

Exercice 20 : On considère la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_{-\infty}^x \frac{dt}{1+t+t^2}.$$

1. Justifier que la fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}$.

2. Montrer que la fonction f est développable en série entière et calculer son développement en série entière en précisant son rayon de convergence.

Exercice 21 : On définit la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \sin(tx) dt.$$

1. Montrer que f est solution d'une équation différentielle linéaire (E).

2. En déduire que f est développable en série entière et déterminer son développement en série entière en précisant son rayon de convergence.

Exercice 22 : On considère la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = e^{-x^2} \int_0^x e^{t^2} dt.$$

1. Montrer que f est une fonction impaire et qu'elle est solution de l'équation différentielle $y' + 2xy = 1$.

2. On considère une série entière $\sum_{n \geq 0} a_n x^{2n+1}$ dont le rayon de convergence R est non nul et on note g sa somme sur son intervalle de convergence.

(a) Montrer que g est solution de $y' + 2xy = 1$ si et seulement si

$$a_0 = 1 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}^*, \quad a_n = -\frac{2}{2n+1} a_{n-1}.$$

(b) En déduire une expression de a_n pour tout $n \in \mathbb{N}$ et la valeur de R .

3. En déduire que f est développable en série entière et déterminer son développement en série entière.

Exercice 23 : On considère la fonction $f :]-1, 1[\rightarrow \mathbb{R}$ par

$$\forall x \in]-1, 1[, \quad f(x) = \cos(\text{Arcsin}(x)).$$

1. Montrer que f est solution de l'équation différentielle linéaire

$$(1-x^2)y'' - xy' - y = 0 \quad (E).$$

2. En déduire que f est développable en série entière et déterminer son développement en série entière en précisant son rayon de convergence.

IV.B - Applications des développements en série entière

Exercice 24 : Justifier que les séries numériques suivantes sont convergentes, puis calculer leur somme.

$$(i) \sum_{n \geq 1} \frac{(-1)^n}{n}, \quad (ii) \sum_{n \geq 0} \frac{(-1)^n}{2n+1}, \quad (iii) \sum_{n \geq 0} \left(\prod_{k=0}^{n-1} \frac{1-2k}{2k+2} \right).$$

Exercice 25 : Démontrer les égalités suivantes.

$$(i) \int_0^1 \frac{\ln(1+t)}{t} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}, \quad (ii) \int_0^1 \frac{\ln(t) \ln(1-t)}{t} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^3},$$

$$(iii) \int_0^1 t^{-t} dt = \sum_{n=1}^{+\infty} n^{-n}, \quad (iv) \int_0^{+\infty} \frac{\cos(\sqrt{t})}{e^t} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{n!}{(2n)!}.$$

Exercice 26 : Calculer la somme ci-dessous en remarquant que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)(2n+2)} = \int_0^1 \operatorname{Arctan}(x) dx.$$

Exercice 27 : On considère la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par $u_0 = 0$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = \frac{u_n}{2} + (-1)^n.$$

On note f la somme de la série entière $\sum_{n \geq 0} u_n x^n$.

1. Montrer que $|u_n| \leq 2$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. En déduire que le rayon de convergence de la série entière $\sum u_n x^n$ est supérieur ou égal à 1.
2. Pour tout $x \in]-1, 1[$, calculer et simplifier $(2-x)f(x)$.
3. En déduire une expression de la suite $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Exercice 28 : Montrer que $\exp((a+b)z) = \exp(az) \exp(bz)$ pour tout $(a, b, z) \in \mathbb{C}^3$ en utilisant un produit de Cauchy.

Exercice 29 : On note $j = e^{i\frac{2\pi}{3}}$.

1. Calculer $1 + j^n + j^{2n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Calculer le développement en série entière de $x \mapsto e^x + e^{jx} + e^{j^2x}$.
3. En déduire la valeur de $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(3n)!}$.

Exercice 30 : Montrer que $\operatorname{ch}(x) \leq \exp\left(\frac{x^2}{2}\right)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 31 - Nombres de Catalan : Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la suite définie par $a_0 = 1$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad a_{n+1} = \sum_{k=0}^n a_k a_{n-k}.$$

On note R le rayon de convergence de la série entière $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$ et on désigne sa somme par f .

1. On suppose que $R > 0$.

- (a) Montrer que $xf(x)^2 - f(x) + 1 = 0$ pour tout $x \in]-R, R[$.
- (b) En déduire qu'il existe $0 < r < R$ tel que

$$\forall x \in]-r, r[\setminus \{0\}, \quad f(x) = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2x}.$$

2. En déduire une expression de a_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

IV.C - Quelques résultats théoriques

Exercice 32 : Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$ telle que

$$\exists A > 0, \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad |f^{(n)}(x)| \leq A^n \cdot n!.$$

Montrer que f est développable en série entière.

Exercice 33 : Soit $f : [-a, a] \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^\infty$ avec $a > 0$ telle que $f^{(n)} \geq 0$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. On note $R_n(x)$ le reste d'ordre n dans la formule de Taylor.

1. Exprimer $R_n(x)$ sous la formule d'une intégrale pour tout $x \in [-a, a]$.
2. Montrer que $a^{n+1} R_n(x) \leq |x|^{n+1} R_n(a)$ pour tout $x \in]-a, a[$.
3. En déduire que f est développable en série entière.