Mathématiques

PT

Lycée Couffignal

CHAPITRE 12

Séries entières

Plan du chapitre

Introduction

Une série entière est une fonction définie sur une partie de $\mathbb{C}$ de la forme

$$f : z \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n \quad \text{avec} \quad (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}.$$

Il est naturel de se demander si l'ensemble de convergence de la série ci-dessus et si la fonction f admettent des propriétés remarquables.

La première apparition d'une série entière remonte au XIVe siècle dans les travaux de l'indien Madhava de Sangamagrama. Ce dernier réussit à calculer les onze premières décimales du nombre π en établissant la relation

$$\forall x \in [-1,1], \quad \mathrm{Arctan}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{2n+1}.$$

Le mathématicien découvre également des formules analogues pour les fonctions trigonométriques cosinus, sinus et tangente.
Au XVIIe siècle, ces résultats sont redécouverts en Europe par le mathématicien écossais James Gregory. En 1715, Brook Taylor établit un lien fructueux avec le calcul différentiel en donnant la construction générale des séries entières portant son nom. Ces découvertes ont initié le développement d'une méthode de résolution pour les équations différentielles linéaires (que nous verrons dans un chapitre ultérieur) en recherchant les solutions sous la forme d'une série entière.
Au XVIIIe siècle, Leonhard Euler démontre la relation

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \exp(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}.$$

Dans ce chapitre, nous commencerons par étudier les résultats généraux portant sur la convergence des séries entières. Dans un second temps, nous établirons les propriétés remarquables d'une fonction réelle définie par la somme d'une série entière. Finalement, nous verrons que la plupart des fonctions usuelles s'écrivent sous la forme d'une somme de série entière.

Dans tout le chapitre, on considère deux suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$.

Partie I Convergence d'une série entière

I.A - Rayon de convergence

Définition (Série entière) : Une série entière est une série de la forme $\sum a_n z^n$ où $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}^{\mathbb{N}}$ et z désigne une variable complexe.

Remarque 1 : Pour $z = 0$, tous les termes de la série sont nuls sauf éventuellement celui d'indice $n = 0$ qui est a_0.

Lemme d'Abel : Si la suite $\left(a_n z_0^n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ est bornée pour un nombre complexe $z_0 \in \mathbb{C}$, alors pour tout élément $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $|z| < |z_0|$, la série numérique $\sum a_n z^n$ est absolument convergente.

Définition (Rayon de convergence) : Le rayon de convergence de la série entière $\sum a_n z^n$ est défini par

$$R = \sup\left\{ r \in \mathbb{R}_+ \mid \text{la suite } \left(a_n r^n\right)_{n\in\mathbb{N}} \text{ est bornée} \right\}.$$

Remarque 2 : Par définition, on a $R \in \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$.

Proposition 1 : Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R \geqslant 0$.

(i) Si $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| < R$, alors $\sum a_n z^n$ converge absolument.

(ii) Si $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| > R$, alors $\sum a_n z^n$ diverge grossièrement.

ATTENTION : Il n'y a pas de règle générale pour la convergence de la série $\sum a_n z^n$ pour les nombres $z \in \mathbb{C}$ tels que $|z| = R$. Il faut étudier au cas par cas.

Remarques 3 :

a) Pour déterminer le rayon de convergence d'une série entière $\sum a_n z^n$, il suffit de déterminer pour quelle complexe $z \in \mathbb{C}$ la série numérique $\sum a_n z^n$ converge absolument.

b) On déduit de la proposition précédente que l'on a l'égalité

$$R = \sup\left\{ r \in \mathbb{R}_+ \;\middle|\; a_n r^n \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \right\}.$$

Exemple 1 : On cherche le rayon de convergence R de la série entière $\sum n2^n z^n$. Pour tout nombre $z \in \mathbb{C}^*$, en notant $u_n = n2^n z^n$, on a

$$\frac{|u_{n+1}|}{|u_n|} = \frac{(n+1)2^{n+1}|z|^{n+1}}{n2^n|z|^n} = \frac{2(n+1)}{n}|z| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2|z|.$$

Par la règle de d'Alembert, on en déduit que la série $\sum n2^n z^n$ converge absolument si $2|z| < 1$ et diverge grossièrement si $2|z| > 1$. On en déduit que $R = 1/2$.

I.B - Disque et intervalle de convergence

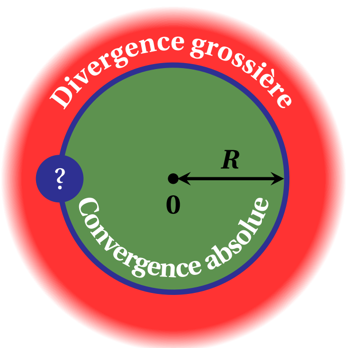
Définition (Disque ouvert et intervalle ouvert de convergence) : Soit $\sum a_n z^n$ une série entière de rayon de convergence $R \geqslant 0$.

(i) Le disque ouvert de centre $0 \in \mathbb{C}$ et de rayon R est appelée le disque ouvert de convergence.

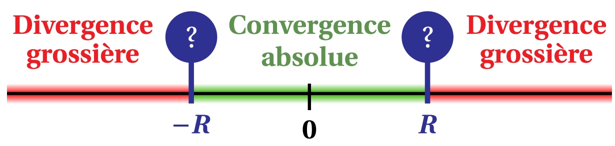
(ii) L'intervalle $]-R, R[$ est appelée intervalle ouvert de convergence.

Remarque 4 : Si $R = +\infty$ le disque ouvert de convergence est $\mathbb{C}$ et l'intervalle ouvert de convergence est $\mathbb{R}$.

Illustration : On peut résumer la situation avec les deux figures ci-dessous.



Disque ouvert de convergence



Intervalle ouvert de convergence

I.C - Comparaisons des rayons de convergence

Proposition 2 : Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayon de convergence respectif R_a et R_b.

(i) Si on a l'inégalité $|a_n| \leqslant |b_n|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, alors on a $R_a \geqslant R_b$.

(ii) Si on a la relation $|a_n| = O(|b_n|)$, alors on a $R_a \geqslant R_b$.

(iii) Si on a l'équivalent $|a_n| \underset{+\infty}{\sim} |b_n|$, alors on a $R_a = R_b$.

Remarques 5 :

a) L'assertion (i) reste valable si l'inégalité $|a_n| \leqslant |b_n|$ n'est que vérifiée à partir d'un certain rang.

b) L'assertion (ii) reste valable si on remplace $|a_n| = O(|b_n|)$ par $|a_n| = o(|b_n|)$.

Exemples 2 :

a) Comme on a $|\sin(n)| \leqslant |1|$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et que la rayon de convergence de la série entière $\sum z^n$ est 1, on en déduit que le rayon de convergence de la série entière $\sum \sin(n) z^n$ est supérieur ou égal à 1.

b) Comme on a $|\sin(2^{-n})| \underset{+\infty}{\sim} |2^{-n}|$ et que la rayon de convergence de la série entière $\sum 2^{-n} z^n$ est 2, on en déduit que le rayon de convergence de la série entière $\sum \sin\left(2^{-n}\right) z^n$ est 2.

I.D - Opérations sur les séries entières

Proposition (Somme de deux séries entières) : Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayon de convergence respectif R_a et R_b. Le rayon de convergence R de la série entière $\sum (a_n + b_n) z^n$ vérifie l'inégalité $R \geqslant \min(R_a, R_b)$. De plus, pour tout $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $|z| < \min(R_a, R_b)$, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} (a_n + b_n) z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right) + \left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right).$$

Remarque 6 : Si $R_a \neq R_b$, alors on a l'égalité $R = \min(R_a, R_b)$.

Proposition (Produit de Cauchy de deux séries entières) : Soient $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ deux séries entières de rayon de convergence respectif R_a et R_b. Le produit de Cauchy des deux séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ est la série entière $\sum c_n z^n$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

Son rayon de convergence R vérifie $R \geqslant \min(R_a, R_b)$ et pour tout $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $|z| < \min(R_a, R_b)$, on a

$$\sum_{n=0}^{+\infty} c_n z^n = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{n=0}^{+\infty} b_n z^n\right).$$

Exemple 3 : Pour tout $z \in \mathbb{C}$ vérifiant $|z| < 1$, on a d'après le théorème précédent que

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \frac{1}{1-z} \times \frac{1}{1-z} = \left(\sum_{n=0}^{+\infty} z^n\right)^2 = \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} 1 \times 1\right) z^n = \sum_{n=0}^{+\infty} (n+1) z^n.$$

Remarque 7 : On peut résumer les deux propositions précédentes : sur un intervalle ouvert où les deux séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ convergent, on peut en effectuer la somme et le produit de Cauchy.

Proposition (Rayon de convergence de la série dérivée) : Les séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum n a_n z^n$ ont le même rayon de convergence.

DÉMONSTRATION (NON EXIGIBLE) :

On note respectivement R et R' les rayons de convergence des séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum n a_n z^n$.

- Comme $|a_n| \leqslant |n a_n|$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $R \geqslant R'$.
- Soit $z \in \mathbb{C}$ tel que $|z| < R$. Si $r > 0$ est un nombre réel tel que $|z| < r < R$, alors on a $\left|\frac{z}{r}\right| < 1$, donc

$$|n a_n z^n| = \left|a_n r^n\right| \times \left|n\left(\frac{z}{r}\right)^n\right| \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0 \times 0 = 0$$

par croissance comparée. On en déduit que $R' \geqslant R$.

On a donc démontré que $R' = R$.

■

Remarque 8 : Plus généralement, on obtient en adaptant la démonstration précédente que pour tout $p \in \mathbb{R}$, les séries entières, $\sum a_n z^n$ et $\sum n^p a_n z^n$ ont le même rayon de convergence.

Partie II Somme d'une série entière d'une variable réelle

Dans cette partie, on considère uniquement une variable réelle x à la place de la variable complexe z.

Définition (Fonction somme d'une série entière) : Si $\sum a_n x^n$ est une série entière, alors sa fonction somme est la fonction $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$.

Remarque 9 : Si la série entière $\sum a_n x^n$ est de rayon de convergence $R \geqslant 0$, alors les résultats de la partie précédente impliquent que sa fonction somme $f : x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n$ est définie sur un intervalle I de la forme

$$I =]-R, R[, \quad I = [-R, R[, \quad I =]-R, R] \quad \text{ou} \quad I = [-R, R].$$

De plus, on a toujours $0 \in I$ et $f(0) = a_0$.

Théorème de continuité : Si $\sum a_n x^n$ est une série entière de rayon de convergence $R > 0$, alors sa fonction somme f est continue sur son intervalle de définition.

DÉMONSTRATION ADMISE

Théorème de primitivation : Si $\sum a_n x^n$ est une série entière de rayon de convergence $R > 0$, alors une primitive de sa fonction somme sur $]-R, R[$ est la fonction F définie par

$$\forall x \in]-R, R[, \quad F(x) = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{+\infty} a_n t^n\right) \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}.$$

DÉMONSTRATION ADMISE

Remarques 10 :

a) Plus précisément, la fonction F définie dans le théorème est la primitive de f qui s'annule en 0.

b) D'après la dernière proposition de la partie précédente, la série entière définissant f et celle définissant F ont le même rayon de convergence.

Exemple 4 : La série entière $\sum x^n$ a pour rayon de convergence $R = 1$. En appliquant le théorème précédent avec le nombre $x = 1/2 \in]-1,1[$, on obtient que

$$\ln(2) = \left[-\ln(1-t)\right]_0^{1/2} = \int_0^{1/2} \frac{\mathrm{d}t}{1-t} = \int_0^{1/2} \left(\sum_{n=0}^{+\infty} t^n\right) \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{1/2} t^n \, \mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)2^{n+1}}.$$

Théorème de dérivation terme à terme : Si $\sum a_n x^n$ est une série entière de rayon de convergence $R > 0$, alors sa fonction somme f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur l'intervalle $]-R,R[$. De plus, on a

$$\forall x \in]-R,R[, \quad f'(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} n a_n x^{n-1}.$$

Démonstration admise

Remarque 11 : D'après la dernière proposition de la partie précédente, la série entière définissant f et celle définissant f' ont le même rayon de convergence.

Exemple 5 : On considère la fonction $f :]-1,1[\to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in]-1,1[, \quad f(x) = \frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n.$$

La série entière $\sum x^n$ a pour rayon de convergence $R = 1$, donc d'après le théorème ci-dessus, on a

$$\forall x \in]-1,1[, \quad f'(x) = \frac{1}{(1-x)^2} = \sum_{n=1}^{+\infty} n x^{n-1}.$$

Partie III Fonctions développables en série entière

III.A - Généralités

Définition (Fonction développable en série entière) : Une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ est développable en série entière s'il existe un intervalle non vide $]-r,r[\subset I$ et une série entière $\sum a_n x^n$ de rayon de convergence $R \geqslant r$ telle que

$$\forall x \in]-r,r[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n.$$

Cette égalité est appelé le développement en série entière de la fonction f.

Proposition 3 : Si $f : I \to \mathbb{R}$ est développable en série entière, alors il existe un intervalle non vide $]-r,r[\subset I$ tel que f est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $]-r,r[$ et

$$\forall x \in]-r,r[, \quad f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n.$$

Définition (Série de Taylor) : La série de Taylor associé à une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur un voisinage de 0 est la série entière $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \frac{f^{(n)}(0)}{n!} x^n$.

Remarques 12 :

a) Toutes les fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ ne sont pas développables en série entière :
   - il existe des fonctions de classe $\mathscr{C}^\infty$ dont la série de Taylor a un rayon de convergence nul ;
   - il existe des fonctions f de classe $\mathscr{C}^\infty$ dont la série de Taylor a un rayon de convergence non nul et dont la somme est différente de f.

b) Si $f :]-r, r[\to \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$, on peut démontrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ avec des intégrations par parties la formule de Taylor avec reste intégrale suivante.

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in]-r, r[, \quad f(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k + \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t.$$

On en déduit que la fonction f est développable en série entière sur $]-r, r[$ si et seulement si

$$\forall x \in]-r, r[, \quad \lim_{n\to+\infty} \int_0^x \frac{(x-t)^n}{n!} f^{(n+1)}(t)\,\mathrm{d}t = 0.$$

Corollaire (Unicité du développement en série entière) : Si $\sum a_n x^n$ et $\sum b_n x^n$ sont deux séries entières qui convergent sur l'intervalle $]-r, r[$ avec $r > 0$, alors on a

$$\forall x \in]-r, r[, \quad \sum_{n=0}^{+\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{+\infty} b_n x^n \quad \Leftrightarrow \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad a_n = b_n.$$

III.B - Développement en série entière des fonctions usuelles

Dans cette partie, nous allons déterminer les développements en série entière des fonctions usuelles. Pour déterminer un développement en série entière, nous utilisons principalement les trois méthodes ci-dessous.

- Utilisation d'une formule de Taylor pour majorer le reste (voir la dernière remarque de la partie précédente).
- Utilisation d'une équation différentielle et de l'unicité d'un problème de Cauchy.
- Utilisation du produit de Cauchy de deux séries entières.

Voici le développement en série entière des fonctions usuelles.

Développement en série entière	Intervalle ouvert de convergence	Rayon de convergence
$\displaystyle\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{+\infty} x^n$	$I =]-1, 1[$	$R = 1$
$\displaystyle\frac{1}{1+x} = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^n$	$I =]-1, 1[$	$R = 1$
$\displaystyle\ln(1-x) = -\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$	$I =]-1, 1[$	$R = 1$
$\displaystyle\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$	$I =]-1, 1[$	$R = 1$
$\displaystyle\mathrm{Arctan}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$	$I =]-1, 1[$	$R = 1$

Développement en série entière	Intervalle ouvert de convergence	Rayon de convergence	
$\exp(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$	$I = \mathbb{R}$	$R = +\infty$	
$\cos(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	$I = \mathbb{R}$	$R = +\infty$	
$\sin(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$I = \mathbb{R}$	$R = +\infty$	
$\operatorname{ch}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$	$I = \mathbb{R}$	$R = +\infty$	
$\operatorname{sh}(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$	$I = \mathbb{R}$	$R = +\infty$	
$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)}{n!} x^n$	$I =]-1,1[$	$R = 1$	si $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$

Remarques 13 :

a) D'après le théorème de continuité, si R est fini et si la série entière converge en $x = R$ (respectivement $x = -R$), alors l'égalité reste valable en $x = R$ (respectivement $x = -R$).

b) Si $\alpha \in \mathbb{N}$, le rayon de convergence du développement en série entière de la fonction $x \mapsto (1+x)^\alpha$ est $R = +\infty$, car les termes de la somme sont nuls à partir d'un certain rang. De plus, le développement en série entière correspond à la formule du le binôme de Newton dans ce cas.

Partie IV Développements de fonctions d'une variable complexe

Dans cette partie, on s'intéresse au développement de deux fonctions d'une variable complexe.

Théorème 1 : Pour tout nombre $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| < 1$, on a l'égalité $\frac{1}{1-z} = \sum_{n=0}^{+\infty} z^n$.

Rappelons que l'exponentielle d'un nombre complexe $z = x + \mathrm{i}y \in \mathbb{C}$ avec $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ est le nombre défini par

$$\exp(z) = \mathrm{e}^x \mathrm{e}^{\mathrm{i}y} = \mathrm{e}^x(\cos(y) + \mathrm{i}\sin(y)).$$

Théorème 2 : Pour tout nombre $z \in \mathbb{C}$, on a l'égalité $\exp(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{z^n}{n!}$.