CHAPITRE 6

Réduction des endomorphismes

Jérôme VON BUHREN
http://vonbuhren.free.fr

Lycée Couffignal - PT*

Considérons un endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$ où E est un espace vectoriel de dimension finie sur un corps $\mathbb{K}$. Pour chaque base $\mathscr{B}$ de E, nous savons associer à f sa matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ dans la base $\mathscr{B}$. Pour faciliter la résolution de nombreux problèmes en algèbre linéaire (calcul des puissances d'une matrice par exemple), nous souhaiterions pouvoir choisir la base $\mathscr{B}$ de E de telle sorte que la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ soit la plus simple possible.

En pratique, nous souhaiterions déterminer une base $\mathscr{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ de E telle que la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ soit diagonale, c'est à dire

$$\exists (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \quad \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}. \qquad (*)$$

D'un point de vue matriciel, le problème se reformule via la formule du changement de base. Nous étudierons à quelles conditions une matrice carrée $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est-elle semblable à une matrice diagonale, c'est à dire

$$\exists P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}), \quad \exists (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \quad M = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Plus généralement, il est naturel de se demander à quelles conditions deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ sont semblables, mais ce problème dépasse le cadre du programme.

En pratique, nous souhaiterions déterminer une base $\mathscr{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ de E telle que la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ soit diagonale, c'est à dire

$$\exists(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \quad \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}. \qquad (*)$$

Par définition, la relation $(*)$ se traduit par $f(v_i) = \lambda_i v_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. Cette remarque nous amènera à étudier les couples $(\lambda, v) \in \mathbb{K} \times E$ avec $v \neq 0_E$ vérifiant la relation $f(v) = \lambda v$. Nous déterminerons ensuite des conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence d'une base $\mathscr{B}$ vérifiant $(*)$.

Dans tout le chapitre, on désigne par $\mathbb{K}$ le corps $\mathbb{R}$ ou le corps $\mathbb{C}$.

Dans cette partie, on considère un endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$ où E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

Définition (Valeur propre)

On dit qu'un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de l'endomorphisme f s'il existe un vecteur $v \in E$ non nul tel que $f(v) = \lambda v$.

Définition (Vecteur propre)

On dit que $v \in E$ non nul est un vecteur propre de l'endomorphisme f s'il existe un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f(v) = \lambda v$.

Remarques 1

a) Un vecteur $v \in E$ non nul est un vecteur propre de f si et seulement si la droite vectorielle $\mathrm{Vect}(v)$ est stable par f.

b) L'équation $f(v) = \lambda v$ d'inconnue $(\lambda, v) \in \mathbb{K} \times E \setminus \{0_E\}$ est appelée équation aux éléments propres.

Exemple 1

Soit $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ l'endomorphisme défini par $f : P \mapsto P + XP'$.
On a $f(X) = 2X$, donc X est un vecteur propre de f pour la valeur propre 2.

Définition (Sous-espace propre)

Le sous-espace propre de f associé à une valeur propre $\lambda \in \mathbb{K}$ de f est le sous-espace vectoriel $E_\lambda(f) = \mathrm{Ker}(\lambda \mathrm{Id}_E - f)$.

Remarque 2

Le sous-espace propre $E_\lambda(f)$ est l'ensemble constitué du vecteur nul et des vecteurs propres de f associés à la valeur propre λ.

Exemple 2

En reprenant l'exemple précédent, on a en écrivant $P = aX^2 + bX + c$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ que

$$P \in E_2(f) \quad \Leftrightarrow \quad 2P - f(P) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad c - aX^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = c = 0,$$

donc on a $E_2(f) = \mathrm{Vect}(X)$.

Définition (Spectre)

Le spectre de f, noté $\mathrm{Sp}(f)$, est l'ensemble des valeurs propres de f.

Théorème 1

Une somme finie de sous-espaces propres de f associés à des valeurs propres deux à deux distinctes est directe.

Remarques 3

a) On en déduit que toute famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libres.

b) Si E est de dimension finie, on en déduit que f admet au plus $\dim(E)$ valeurs propres distinctes.

Exemple 3

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on considère la fonction $f_\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f_\lambda : t \mapsto e^{\lambda t}$. Si on note φ l'endomorphisme de $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ défini par $\varphi : f \mapsto f'$, on remarque que

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \varphi(f_\lambda) = \lambda f_\lambda,$$

donc la fonction f_λ est un vecteur propre de φ pour la valeur propre λ. On en déduit que si $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ sont des nombres distincts deux à deux, alors la famille $(f_{\lambda_1}, \ldots, f_{\lambda_n})$ est libre.

Dans cette partie, on suppose que l'espace vectoriel E est de dimension finie.

Définition (Polynôme caractéristique)

Le polynôme caractéristique de f est l'application $\chi_f : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ définie par

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \chi_f(\lambda) = \det(\lambda \mathrm{Id}_E - f).$$

Proposition 1

Le polynôme caractéristique de f est une fonction polynômiale de degré $\dim(E)$ dont le coefficient dominant est égal à 1.

Théorème 2

Les valeurs propres de f sont les racines dans $\mathbb{K}$ du polynôme caractéristique χ_f.

Définition (Ordre de multiplicité d'une valeur propre)

L'ordre de multiplicité d'une valeur propre λ de l'endomorphisme f, notée $m_\lambda(f)$, est l'ordre de multiplicité de la racine λ dans le polynôme caractéristique χ_f.

Exemple 4

On considère l'endomorphisme $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ défini par

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad f(x,y,z) = (x+y+z, x+y+z, x+y+z).$$

Le polynôme caractéristique de l'endomorphisme f est

$$\chi_f(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda-1 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda-1 \end{vmatrix} \underset{C_1 \leftarrow C_1+C_2+C_3}{=} \begin{vmatrix} \lambda-3 & -1 & -1 \\ \lambda-3 & \lambda-1 & -1 \\ \lambda-3 & -1 & \lambda-1 \end{vmatrix}$$

$$\underset{\substack{L_2 \leftarrow L_2-L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3-L_1}}{=} (\lambda-3) \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & \lambda & 0 \\ 0 & 0 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2(\lambda-3).$$

Exemple 4

Le polynôme caractéristique de l'endomorphisme f est

$$\chi_f(\lambda) = \lambda^2(\lambda - 3).$$

D'après lé théorème précédent, on en déduit que les valeurs propres de l'endomorphisme f sont 0 et 3 avec pour multiplicité $m_0(f) = 2$ et $m_3(f) = 1$. De plus, on obtient par le calcul que les sous-espaces propres associés sont

$$E_0(f) = \text{Vect}\big((1,0,-1),(0,1,-1)\big) \quad \text{et} \quad E_3(f) = \text{Vect}\big((1,1,1)\big).$$

Théorème 3

Si $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de f, alors on a l'inégalité

$$1 \leqslant \dim(E_\lambda(f)) \leqslant m_\lambda(f).$$

Exemple 5

On considère l'endomorphisme $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ défini par

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad f(x,y,z) = (x, y+z, z).$$

Le polynôme caractéristique de l'endomorphisme f est $\chi_f(\lambda) = (\lambda - 1)^3$. On en déduit que f admet une unique valeur propre qui est 1 et que sa multiplicité est $m_1(f) = 3$. Le sous-espace propre associé est

$$E_1(f) = \mathrm{Vect}\big((1,0,0),(0,0,1)\big)$$

qui est de dimension 2.

Dans cette partie, on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et une matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On identifie les éléments de $\mathbb{K}^n$ aux matrices colonnes de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Définition

Toutes les définitions précédentes s'adaptent aux matrices carrées.

(i) On dit que $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de M s'il existe un vecteur $V \in \mathbb{K}^n$ non nul tel que $MV = \lambda V$.

(ii) On dit que $V \in \mathbb{K}^n$ non nul est un vecteur propre de M s'il existe un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $MV = \lambda V$.

(iii) Si $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de la matrice M, le sous-espace propre de M associé à λ est le sous-espace vectoriel $E_\lambda(M) = \mathrm{Ker}(\lambda \mathrm{I}_n - M)$.

(iv) Le spectre de M, noté $\mathrm{Sp}(M)$, est l'ensemble des valeurs propres de M.

(v) Le polynôme caractéristique de la matrice M est l'application $\chi_M : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ définie par

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \chi_M(\lambda) = \det(\lambda \mathrm{I}_n - M).$$

Remarque 4

L'équation $MV = \lambda V$ d'inconnue $(\lambda, V) \in \mathbb{K} \times \mathbb{K}^n \setminus \{0_{\mathbb{K}^n}\}$ est appelée équation aux éléments propres.

Théorème 4

Une somme finie de sous-espaces propres de M associés à des valeurs propres deux à deux distinctes est directe.

Remarque 5

On en déduit qu'une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ admet au plus n valeurs propres distinctes.

Proposition 2

Le polynôme caractéristique de M est une fonction polynômiale de degré n dont le coefficient dominant est égal à 1.

Théorème 5

Les valeurs propres de la matrice M sont les racines racines du polynôme caractéristique χ_M.

Remarque 6

Les valeurs propres d'une matrices triangulaires sont ses coefficients diagonaux.

Définition (Ordre de multiplicité d'une valeur propre)

L'ordre de multiplicité d'une valeur propre λ de la matrice M, noté $m_\lambda(M)$, est l'ordre de multiplicité de la racine λ dans le polynôme caractéristique χ_M.

Théorème 6

Si $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de M, alors on a l'inégalité

$$1 \leqslant \dim(E_\lambda(M)) \leqslant m_\lambda(M).$$

Remarque 7

Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique, donc les mêmes valeurs propres avec mêmes multiplicités.

Bilan

Une fois que l'on a fixé une base $\mathscr{B}$ de l'espace vectoriel E, nous pouvons donc passer des objets définis dans le cadre des espaces vectoriels à des objets matriciels. Le tableau ci-dessous résume la correspondance entre ces deux aspects avec les notions de seconde année.

Représentation vectorielle	**Lien**	**Représentation matricielle**
$v \in E$	$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}$	$V \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$
$f \in \mathscr{L}(E)$	$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}$	$M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$
$v \in E_\lambda(f)$	$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}$	$V \in E_\lambda(M)$
$\mathrm{Sp}(f)$	$=$	$\mathrm{Sp}(M)$
χ_f	$=$	χ_M
$m_\lambda(f)$	$=$	$m_\lambda(M)$
$\mathrm{tr}(f)$	$=$	$\mathrm{tr}(M)$
$\det(f)$	$=$	$\det(M)$

Dans cette partie, on considère un élément $f \in \mathscr{L}(E)$ où E est un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{K}$.

Définition (Endomorphisme diagonalisable)

L'endomorphisme f est diagonalisable s'il existe une base $\mathscr{B}$ de l'espace vectoriel E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ est diagonale.

Remarque 8

On peut reformuler la définition précédente. L'endomorphisme f est diagonalisable si et seulement si il existe une base $\mathscr{B}$ de E constitué de vecteurs propres pour f.

Exemples 6

a) Soit $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ l'endomorphisme défini par $f : P \mapsto P + XP'$.
Dans la base canonique $\mathscr{C} = (1, X, X^2)$ de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$, on a

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

donc l'endomorphisme f est diagonalisable.

b) Toute homothétie vectorielle de E est diagonalisable, car sa matrice dans toute base de E est diagonale.

Exemples 6

c) Tout projecteur vectoriel $p \in \mathscr{L}(E)$ est diagonalisable, car si $\mathscr{B}$ est une base adaptée à la décomposition en somme directe $E = \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Ker}(p)$, on a

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(p) = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_r & \mathrm{O} \\ \mathrm{O} & \mathrm{O} \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad r = \mathrm{rang}(p).$$

d) Toute symétrie vectorielle $s \in \mathscr{L}(E)$ est diagonalisable, car si $\mathscr{B}$ est une base adaptée à la décomposition en somme directe $E = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$, on a

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(s) = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_k & \mathrm{O} \\ \mathrm{O} & -\mathrm{I}_\ell \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad (k, \ell) \in \mathbb{N}^2.$$

Théorème 7

L'endomorphisme f est diagonalisable si et seulement si $E = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f)} E_\lambda(f)$.

On rappelle qu'un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ est scindé sur $\mathbb{K}$ s'il s'écrit comme un produit de facteurs de degré 1 de $\mathbb{K}[X]$. Par le théorème de d'Alembert-Gauss, tous les polynômes de $\mathbb{C}[X]$ sont scindés sur $\mathbb{C}$. Par contre, ce n'est pas le cas de tous les polynômes de $\mathbb{R}[X]$: par exemple le polynôme $X^2+1 \in \mathbb{R}[X]$ n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$.

Théorème de caractérisation des endomorphismes diagonalisables

Les assertions suivantes sont équivalentes.

(i) L'endomorphisme f est diagonalisable.

(ii) On a la relation

$$\dim(E) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f)} \dim(E_\lambda(f)).$$

(iii) Le polynôme caractéristique χ_f est scindé sur $\mathbb{K}$ et

$$\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(f), \quad \dim(E_\lambda(f)) = m_\lambda(f).$$

Corollaire 1

Si l'endomorphisme f admet $\dim(E)$ valeurs propres distinctes, alors f est diagonalisable.

Remarque 9

Dans ce cas, les sous-espaces propres de f sont des droites vectorielles.

ATTENTION

La réciproque du corollaire est fausse ! Par exemple, une homothétie est diagonalisable, mais elle admet une unique valeur propre.

Dans cette partie, on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et une matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On identifie les éléments de $\mathbb{K}^n$ aux matrices colonnes de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Définition (Matrice diagonalisable)

La matrice M est diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale.

Remarque 10

Si $f \in \mathscr{L}(E)$ est un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie sur $\mathbb{K}$ et si $\mathscr{B}$ est une base de E, alors il résulte de la définition précédente et de la formule du changement de base que l'on a l'équivalence

$$f \text{ est diagonalisable} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \text{ est diagonalisable.}$$

Théorème 8

La matrice M est diagonalisable si et seulement si $\mathbb{K}^n = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(M)} E_\lambda(M)$.

Théorème de caractérisation des matrices diagonalisables

Les assertions suivantes sont équivalentes.

(i) La matrice M est diagonalisable.

(ii) On a la relation
$$\dim\left(\mathbb{K}^n\right) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(M)} \dim(E_\lambda(M)).$$

(iii) Le polynôme caractéristique χ_M est scindé sur $\mathbb{K}$ et
$$\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(M), \quad \dim(E_\lambda(M)) = m_\lambda(M).$$

Corollaire 2

Si la matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ admet n valeurs propres distinctes, alors M est diagonalisable.

Remarque 11

Dans ce cas, les sous-espaces propres de M sont des droites vectorielles.

ATTENTION

La réciproque est fausse ! Par exemple, une matrice de la forme $M = \lambda \mathrm{I}_n$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$ est diagonalisable, mais elle admet une unique valeur propre.

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ que l'on souhaite diagonaliser si possible sur $\mathbb{K}$.

1) On calcule le polynôme caractéristique de A.
   a) Si χ_A n'est pas scindé sur $\mathbb{K}$, alors la matrice A n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{K}$. On conclut que l'on ne peut pas la diagonaliser sur $\mathbb{K}$.
   b) Sinon, on note $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}$ les valeurs propres de A.
2) On détermine une base $\mathscr{B}_k$ de chaque sous-espace propre $E_{\lambda_k}(A)$ de A.
   a) Si pour une valeur propre λ_k de A, on a $\dim(E_{\lambda_k}(A)) < m_{\lambda_k}(A)$, alors la matrice A n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{K}$. On conclut que l'on ne peut pas la diagonaliser sur $\mathbb{K}$.
   b) Sinon, on passe au point suivant.

3) On note $\mathscr{B} = (\mathscr{B}_1, \ldots, \mathscr{B}_p)$ qui est une base de l'espace vectoriel $\mathbb{K}^n$. Si $\mathscr{C}$ est la base canonique de $\mathbb{K}^n$, on a par la formule du changement de base

$$A = PDP^{-1} \quad \text{avec} \quad P = P_{\mathscr{C}\to\mathscr{B}}$$

et $D \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est la matrice diagonale

$$D = \mathrm{Diag}(\underbrace{\lambda_1, \ldots, \lambda_1}_{m_{\lambda_1}(A)}, \underbrace{\lambda_2, \ldots, \lambda_2}_{m_{\lambda_2}(A)}, \ldots, \underbrace{\lambda_p, \ldots, \lambda_p}_{m_{\lambda_p}(A)}).$$

Exemple 7

On souhaite diagonaliser sur $\mathbb{R}$ la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}).$$

Son polynôme caractéristique est

$$\chi_A(\lambda) = \det(\lambda \mathrm{I}_2 - A) = \begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1.$$

Le polynôme χ_A n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$, car son discriminant est strictement négatif. On en déduit que A n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

Exemple 8

On reprend la matrice A de l'exemple précédent que l'on souhaite diagonaliser sur $\mathbb{C}$. Son polynôme caractéristique est

$$\chi_A(\lambda) = \lambda^2 + 1 = (\lambda - \mathrm{i})(\lambda + \mathrm{i})$$

qui est scindé sur $\mathbb{C}$. On en déduit que $\mathrm{Sp}(A) = \{\mathrm{i}, -\mathrm{i}\}$. On détermine une base de chacun des sous-espaces propres.

$$E_{\mathrm{i}}(A) = \mathrm{Ker}(\mathrm{i}\,\mathrm{I}_2 - A) = \mathrm{Ker}\left(\begin{pmatrix} \mathrm{i} & 1 \\ -1 & \mathrm{i} \end{pmatrix}\right) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -\mathrm{i} \end{pmatrix}\right),$$

$$E_{-\mathrm{i}}(A) = \mathrm{Ker}(-\mathrm{i}\,\mathrm{I}_2 - A) = \mathrm{Ker}\left(\begin{pmatrix} -\mathrm{i} & 1 \\ -1 & -\mathrm{i} \end{pmatrix}\right) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix}\right).$$

Exemple 8

Comme on a $\dim\left(\mathbb{C}^2\right) = \dim E_{\mathrm{i}}(A) + \dim E_{-\mathrm{i}}(A)$, on en déduit que A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$. Finalement, on a

$$A = PDP^{-1} \quad \text{avec} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\mathrm{i} & \mathrm{i} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

Remarque 12

On constate dans l'exemple ci-dessus que les vecteurs propres sont conjugués. De manière générale, si $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ est une valeur propre d'une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, alors le nombre $\bar{\lambda}$ est une valeur propre de A et les sous-espaces propres associés sont conjugués. En effet, on a

$$V \in E_\lambda(A) \;\Leftrightarrow\; AV = \lambda V \underset{\substack{\text{Conjugaison}\\ A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})}}{\Longleftrightarrow} A\overline{V} = \bar{\lambda}\,\overline{V} \;\Leftrightarrow\; \overline{V} \in E_{\bar{\lambda}}(A).$$

En particulier, si on a $E_\lambda(A) = \mathrm{Vect}(V_1, \dots, V_p)$, alors $E_{\bar{\lambda}}(A) = \mathrm{Vect}\left(\overline{V_1}, \dots, \overline{V_p}\right)$.

Exemple 9

On souhaite diagonaliser sur $\mathbb{R}$ la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}).$$

Son polynôme caractéristique est

$$\chi_A(\lambda) = \det(\lambda \mathrm{I}_2 - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 1 & -1 \\ 0 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)^2.$$

qui est un polynôme scindé sur $\mathbb{R}$. On en déduit que $\mathrm{Sp}(A) = \{1\}$.

Exemple 9

On détermine le sous-espace propre associé.

$$E_1(A) = \operatorname{Ker}(\mathrm{I}_2 - A) = \operatorname{Ker}\left(\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right) = \operatorname{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right).$$

On remarque que $\dim E_1(A) = 1 < 2 = m_1(A)$, donc la matrice A n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

Exemple 10

On souhaite diagonaliser sur $\mathbb{R}$ la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}).$$

En utilisant l'opération élémentaire $C_1 \leftarrow C_1 + C_2 + C_3$, on obtient que

$$\chi_A(\lambda) = \det(\lambda \mathrm{I}_3 - A) = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 & -1 \\ -1 & \lambda - 2 & -1 \\ -1 & -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \lambda - 4 & -1 & -1 \\ \lambda - 4 & \lambda - 2 & -1 \\ \lambda - 4 & -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda - 4) \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & \lambda - 2 & -1 \\ 1 & -1 & \lambda - 2 \end{vmatrix}.$$

Exemple 10

De plus, en utilisant $L_2 \leftarrow L_2 - L_1$ et $L_3 \leftarrow L_3 - L_1$, on obtient que le polynôme caractéristique de A est

$$\chi_A(\lambda) = (\lambda - 4)\begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & \lambda - 1 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = (\lambda - 4)(\lambda - 1)^2.$$

qui est un polynôme scindé sur $\mathbb{R}$. Les valeurs propres de A sont 1 et 4.

Exemple 10

On détermine une base de chacun des sous-espaces propres.

$$E_1(A) = \mathrm{Ker}(\mathrm{I}_3 - A) = \mathrm{Ker}\left(\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}\right) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right),$$

$$E_4(A) = \mathrm{Ker}(4\mathrm{I}_3 - A) = \mathrm{Ker}\left(\begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\right) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

Comme on a $\dim\left(\mathbb{R}^3\right) = \dim E_1(A) + \dim E_4(A)$, on en déduit que A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$. Finalement, on a

$$A = PDP^{-1} \quad \text{avec} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Remarque 13

Lorsque l'on a réussi à diagonaliser une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, il est facile de calculer ses puissances. En effet, si on peut écrire $A = PDP^{-1}$ avec une matrice diagonale $D \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et une matrice inversible $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, alors pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a la relation

$$A^k = (PDP^{-1})^k = (PD\underbrace{P^{-1})(P}_{\mathrm{I}_n}D\underbrace{P^{-1})(P}_{\mathrm{I}_n}DP^{-1})\cdots(PD\underbrace{P^{-1})(P}_{\mathrm{I}_n}DP^{-1}) = PD^kP^{-1},$$

donc on peut calculer A^k car l'on connait P, D^k et P^{-1}.

Exemple 11

On souhaite calculer les puissances de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}).$$

D'après l'exemple précédent, on a

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}}_{P} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}}_{D} \underbrace{\begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & -2/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}}_{P^{-1}}.$$

Exemple 11

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on en déduit que

$$\begin{aligned}
A^k &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & -2/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & -2/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \\
&= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4^k+2 & 4^k-1 & 4^k-1 \\ 4^k-1 & 4^k+2 & 4^k-1 \\ 4^k-1 & 4^k-1 & 4^k+2 \end{pmatrix}.
\end{aligned}$$

Dans cette partie, on considère un élément $f \in \mathscr{L}(E)$ où E est un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{K}$.

Définition (Endomorphisme trigonalisable)

L'endomorphisme f est trigonalisable s'il existe une base $\mathscr{B}$ de l'espace vectoriel E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ est triangulaire supérieure.

Remarque 14

On peut démontrer que l'on obtient une définition équivalente de trigonalisable en remplaçant la mention « triangulaire » par « triangulaire supérieure ».

Théorème de caractérisation des endomorphismes trigonalisables

L'endomorphisme f est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique χ_f est scindé sur $\mathbb{K}$.

DÉMONSTRATION

ADMISE

Corollaire 3

Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, tout endomorphisme de E est trigonalisable.

Théorème 9

On suppose que χ_f est scindé sur $\mathbb{K}$. Si $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ sont les valeurs propres de f comptées avec multiplicité, alors

$$\mathrm{tr}(f) = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n \quad \text{et} \quad \det(f) = \lambda_1 \cdots \lambda_n.$$

Remarques 15

a) Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, les formules précédentes sont toujours vérifiées, car tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ est scindé sur $\mathbb{C}$.

b) On en déduit avec les relations entre les coefficients et les racines d'un polynôme que

$$\chi_f(\lambda) = \lambda^{\dim(E)} - \mathrm{tr}(f)\lambda^{\dim(E)-1} + \cdots + (-1)^{\dim(E)}\det(f).$$

Exemple 12

On considère l'endomorphisme $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ défini par

$$\forall (x,y,z) \in \mathbb{R}^3, \quad f(x,y,z) = (2x+y+z, x+2y+z, x+y+2z).$$

Le polynôme caractéristique de f est $\chi_f(\lambda) = (\lambda-1)^2(\lambda-4)$. Les valeurs propres de l'endomorphisme f sont 1 et 4 avec les multiplicités $m_1(f) = 2$ et $m_4(f) = 1$. Le polynôme χ_f est scindé sur $\mathbb{R}$ et on a

$$\mathrm{tr}(f) = 1+1+4 = 6 \quad \text{et} \quad \det(f) = 1 \times 1 \times 4 = 4.$$

Dans cette partie, on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et une matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Définition (Matrice trigonalisable)

La matrice M est trigonalisable si M elle est semblable à une matrice triangulaire supérieure.

Remarque 16

Si $f \in \mathscr{L}(E)$ est un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie sur $\mathbb{K}$ et si $\mathscr{B}$ est une base de E, alors il résulte de la définition précédente et de la formule du changement de base que l'on a l'équivalence

$$f \text{ est trigonalisable} \quad \Leftrightarrow \quad \operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \text{ est trigonalisable.}$$

Théorème de caractérisation des matrices trigonalisables

La matrice M est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique χ_M est scindé sur $\mathbb{K}$.

DÉMONSTRATION

ADMISE

Corollaire 4

Toute matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable.

Théorème 10

On suppose que χ_M est scindé sur $\mathbb{K}$. Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ sont les valeurs propres de M comptées avec multiplicité, alors

$$\operatorname{tr}(M) = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n \quad \text{et} \quad \det(M) = \lambda_1 \cdots \lambda_n.$$

Remarques 17

a) Si on considère les valeurs propres complexes de M, les formules précédentes sont vérifiées.

b) On en déduit avec les relations entre les coefficients et les racines d'un polynôme que

$$\chi_M(\lambda) = \lambda^n - \operatorname{tr}(M)\lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(M).$$

Le programme ne demande pas de savoir trigonaliser de manière effective une matrice. Il faut se laisser guider par les énoncés des exercices.

Remarque 18

Lorsque l'on a réussi à trigonaliser une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$, il est souvent possible de calculer ses puissances. En effet, si on peut écrire $A = PTP^{-1}$ avec une matrice triangulaire $T \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et une matrice inversible $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, alors on a la relation

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad A^k = PT^kP^{-1}.$$

Pour conclure, il faut réussir à calculer T^k pour en déduire A^k.

Exemple 13

On souhaite calculer les puissance de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}).$$

Son polynôme caractéristique est $\chi_A(\lambda) = (\lambda - 2)^2$ et on a

$$E_2(A) = \mathrm{Ker}(A - \mathrm{I}_2) = \mathrm{Ker}\left(\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right).$$

On en déduit que la matrice A n'est pas diagonalisable.

Exemple 13

Pour trigonaliser la matrice A, il suffit de compléter le vecteur propre ci-dessus en choisissant un second vecteur non colinéaire à ce dernier, puis de poser

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R})$$

$$\text{et} \qquad T = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on en déduit que

$$\begin{aligned} A^k = PT^kP^{-1} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2^k & -k2^{k-1} \\ 0 & 2^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{k-1}(2-k) & -k2^{k-1} \\ k2^{k-1} & 2^{k-1}(2+k) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$