

TD 6

Réduction des endomorphismes

Partie I Valeurs propres et vecteurs propres

Exercice 1 : Soient $E = \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et D l'endomorphisme de E qui à $f \in E$ associe la fonction f' . Déterminer les éléments propres de D .

Exercice 2 : Soient $E = \mathcal{C}^0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ et φ l'endomorphisme de E défini par

$$\forall f \in E, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(f)(x) = \int_0^x f(t) dt.$$

Déterminer les éléments propres de φ .

Exercice 3 : Soit E l'espace vectoriel des suites réelles convergeant vers 0. On considère l'application Δ définie sur E qui à chaque élément $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de E associe la suite $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad v_n = u_{n+1} - u_n.$$

1. Montrer que Δ est un endomorphisme de E .
2. Déterminer les éléments propres de Δ .

Exercice 4 : On considère l'application $\varphi : \mathcal{M}_n(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ définie par

$$\forall M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}), \quad \varphi(M) = M + \text{tr}(M) \text{I}_n.$$

1. Montrer que φ est un endomorphisme.
2. Déterminer ses éléments propres.

Exercice 5 : Soit $(A, B) \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})^2$ vérifiant $AB - BA = A$.

1. Calculer $A^k B - B A^k$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
2. En considérant l'endomorphisme de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ défini par $M \mapsto MB - BM$, en déduire que la matrice A est nilpotente.

Exercice 6 : Déterminer les éléments propres de la matrice suivante.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_4(\mathbb{R}).$$

Exercice 7 : Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 3$. Déterminer les éléments propres de la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 \\ \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

Exercice 8 : Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme d'un espace vectoriel E . Montrer que si $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de u , alors λ^p est une valeur propre de u^p pour tout entier $p \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 9 : Soit u un automorphisme d'un espace vectoriel E . Montrer que

$$\text{Sp}(u^{-1}) = \{\lambda^{-1} \in \mathbb{K} \mid \lambda \in \text{Sp}(u)\}.$$

Exercice 10 : Soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$ des endomorphismes d'un espace vectoriel E de dimension finie. Montrer que $u \circ v$ et $v \circ u$ ont les mêmes valeurs propres.

Exercice 11 : Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que $\chi_M = \chi_{M^\top}$.
2. On suppose que $M \in \mathcal{A}_n(\mathbb{R})$. Étudier la parité du polynôme χ_M .

Partie II Endomorphismes et matrices diagonalisables

Exercice 12 : On considère les matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ suivantes.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & -2 & 0 \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 3 & 2 \\ -2 & 5 & 2 \\ 2 & -3 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Répondre aux questions suivantes pour chacune des matrices ci-dessus.

1. Déterminer le polynôme caractéristique de la matrice.
2. Déterminer les éléments propres de la matrice sur $\mathbb{R}$.
3. La matrice est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$? Si oui, la diagonaliser.

Exercice 13 : On considère les matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ suivantes.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} i & -1 & -1+2i \\ 2 & 3+i & 1-3i \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Répondre aux questions suivantes pour chacune des matrices ci-dessus.

1. Déterminer le polynôme caractéristique de la matrice.
2. Déterminer les éléments propres de la matrice sur $\mathbb{C}$.
3. La matrice est-elle diagonalisable sur $\mathbb{C}$? Si oui, la diagonaliser.

Exercice 14 : Pour $m \in \mathbb{R}$, on considère les matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ suivantes

$$A_m = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2-m & m-2 & m \end{pmatrix}, \quad B_m = \begin{pmatrix} 6 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \\ m^2-7m & m-7 & m \end{pmatrix}.$$

Répondre aux questions suivantes pour chacune des matrices ci-dessus.

1. Déterminer le polynôme caractéristique de la matrice.
2. Pour quelles valeurs de $m \in \mathbb{R}$ est-elle diagonalisable sur $\mathbb{R}$?

Exercice 15 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Diagonaliser la matrice

$$J = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

Exercice 16 : On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R}).$$

Diagonaliser la matrice A , puis en déduire A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 17 : On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -5 & 3 \\ 6 & -2 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).$$

1. Diagonaliser la matrice A .
2. Déterminer une matrice $B \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ telle que $B^3 = A$.

Exercice 18 : Les matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{C})$ ci-dessous sont-elles semblables?

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 19 : On considère les suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ définies par leur premier terme $u_0, v_0, w_0 \in \mathbb{R}$ et les relations

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} u_{n+1} &= -u_n + v_n + w_n \\ v_{n+1} &= u_n - v_n + w_n \\ w_{n+1} &= u_n + v_n - w_n. \end{cases}$$

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $(u_0, v_0, w_0) \in \mathbb{R}^3$ pour que les trois suites $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ et $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$ convergent.

Exercice 20 : On considère l'endomorphisme $\varphi : \mathbb{C}_3[X] \rightarrow \mathbb{C}_3[X]$ défini par

$$\forall P \in \mathbb{C}_3[X], \quad \varphi(P) = X^3 P(1/X).$$

1. Déterminer le polynôme caractéristique de φ .
2. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de φ .
3. L'endomorphisme φ est-il diagonalisable?

Exercice 21 : Soit $n \in \mathbb{N}$. On définit l'endomorphisme $\varphi : \mathbb{C}_n[X] \rightarrow \mathbb{C}_n[X]$ par

$$\forall P \in \mathbb{C}_n[X], \quad \varphi(P) = P\left(\frac{X+1}{2}\right).$$

1. Déterminer les valeurs propres de φ .
2. L'endomorphisme φ est-il diagonalisable?
3. Calculer $\varphi((X-1)^k)$ pour $k \in \llbracket 0, n \rrbracket$.
4. En déduire les sous-espaces propres de φ .

Exercice 22 : Soit $n \in \mathbb{N}$. On définit l'endomorphisme $\varphi : \mathbb{C}_n[X] \rightarrow \mathbb{C}_n[X]$ par

$$\forall P \in \mathbb{C}_n[X], \quad \varphi(P) = (X^2 - 1)P'' + (2X + 1)P'.$$

1. Déterminer les valeurs propres de l'endomorphisme φ .
2. L'endomorphisme φ est-il diagonalisable?

Exercice 23 : Soit v un endomorphisme diagonalisable d'un $\mathbb{C}$ -espace vectoriel E de dimension finie. Montrer qu'il existe $u \in \mathcal{L}(E)$ tel que $u^2 = v$.

Exercice 24 : Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que si la matrice M est diagonalisable, alors la matrice M^k est diagonalisable pour tout $k \in \mathbb{N}^*$.
2. Montrer que M est diagonalisable si et seulement si $M^\top$ est diagonalisable.
3. Montrer que si M est diagonalisable, alors M et $M^\top$ sont semblables.

Exercice 25 : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on note P_n le polynôme caractéristique de

$$A_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & (0) \\ 1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & 1 \\ (0) & & 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

1. Calculer P_1 et P_2 .
2. Montrer que $P_{n+2}(x) = xP_{n+1}(x) - P_n(x)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ et $x \in \mathbb{R}$.
3. Montrer que pour tout $a \in]0, \pi[$, on a

$$P_n(2 \cos(a)) = \frac{\sin((n+1)a)}{\sin(a)}.$$

4. En déduire les racines du polynôme P_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
5. Montrer que A_n est diagonalisable et préciser ses valeurs propres.

Exercice 26 : Soit $(a, b) \in (\mathbb{R}^*)^2$ tel que $a \neq b$. On considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & (a) \\ & \ddots \\ (b) & 0 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R}).$$

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on définit l'application $f_\lambda : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f_\lambda(x) = \det(\lambda I_n - M + xU) \quad \text{où} \quad U = (1)_{1 \leq i, j \leq n}.$$

1. Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. Montrer que l'application f_λ est affine.
2. En déduire une expression de $f_\lambda(x)$ pour tout $(\lambda, x) \in \mathbb{R}^2$.
3. En déduire le polynôme caractéristique de la matrice M .
4. Montrer que M est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{C})$.
5. Montrer que si $|a| \neq |b|$, alors les points du plan dont les affixes sont les valeurs propres de M appartiennent à un cercle.
6. Déterminer les sous-espaces propres de la matrice M .

Partie III Endomorphismes et matrices trigonalisables

Exercice 27 : On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).$$

1. La matrice A est-elle diagonalisable ?
2. Trigonaliser la matrice A .
3. En déduire une expression de A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 28 : On considère les matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ suivantes.

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -3 \\ 8 & 3 & -5 \\ -2 & -1 & 1 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer les éléments propres de la matrice A . Est-elle diagonalisable ?
2. Montrer que les matrices A et T sont semblables.

Exercice 29 : On considère les matrices de $\mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ suivantes.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad T = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer les valeurs propres de la matrice A . Est-elle diagonalisable ?
2. Montrer que les matrices A et T sont semblables.
3. Calculer A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 30 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, montrer que

$$\text{Sp}(A^k) = \{\lambda^k \in \mathbb{C} \mid \lambda \in \text{Sp}(A)\}.$$

Exercice 31 : Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 3$. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 1 \\ \vdots & (0) & \vdots \\ 1 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C}).$$

1. (a) Déterminer le rang de la matrice A .
(b) En déduire que $0 \in \text{Sp}(A)$ et que $m_0(A) \geq n - 2$.
2. Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ tel que $\text{Sp}(A) = \{0, \lambda, \mu\}$.
(a) Calculer les nombres $\text{tr}(A)$ et $\text{tr}(A^2)$.
(b) En déduire les valeurs propres de A .
3. La matrice A est-elle diagonalisable ?

Exercice 32 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ de rang 2. Exprimer le polynôme caractéristique de la matrice A avec les nombres $\text{tr}(A)$ et $\text{tr}(A^2)$.

Exercice 33 : Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ une matrice vérifiant $M^3 = 3M^2 - 2M$.

1. En considérant un vecteur propre de M , montrer que $\text{Sp}(M) \subset \{0, 1, 2\}$.
2. On suppose en plus dans cette question que $\text{tr}(M) = 0$.
(a) Montrer que $\text{Sp}(M) = \{0\}$.
(b) En déduire que la matrice $M^2 - 3M + 2I_n$ est inversible.
(c) Conclure que la matrice M est nulle.

Exercice 34 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ une matrice de rang 1. Montrer que A est diagonalisable si et seulement si $\text{tr}(A) \neq 0$.

Exercice 35 : Montrer qu'une matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{C})$ est nilpotente si et seulement si son polynôme caractéristique est X^n .