Mathématiques

PT

Lycée Couffignal

CHAPITRE 6

Réduction des endomorphismes

Plan du chapitre

Introduction

Considérons un endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$ où E est un espace vectoriel de dimension finie sur un corps $\mathbb{K}$. Pour chaque base $\mathscr{B}$ de E, nous savons associer à f sa matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ dans la base $\mathscr{B}$. Pour faciliter la résolution de nombreux problèmes en algèbre linéaire (calcul des puissances d'une matrice par exemple), nous souhaiterions pouvoir choisir la base $\mathscr{B}$ de E de telle sorte que la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ soit la plus simple possible.

En pratique, nous souhaiterions déterminer une base $\mathscr{B} = (v_1, \ldots, v_n)$ de E telle que la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ soit diagonale, c'est à dire

$$\exists (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \quad \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix}. \tag{$*$}$$

D'un point de vue matriciel, le problème se reformule via la formule du changement de base. Nous étudierons à quelles conditions une matrice carrée $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est-elle semblable à une matrice diagonale, c'est à dire

$$\exists P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K}), \quad \exists (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{K}^n, \quad M = P \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix} P^{-1}.$$

Plus généralement, il est naturel de se demander à quelles conditions deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ sont semblables, mais ce problème dépasse le cadre du programme.

Par définition, la relation $(*)$ se traduit par $f(v_i) = \lambda_i v_i$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$. Cette remarque nous amènera à étudier les couples $(\lambda, v) \in \mathbb{K} \times E$ avec $v \neq 0_E$ vérifiant la relation $f(v) = \lambda v$. Nous déterminerons ensuite des conditions nécessaires et suffisantes pour l'existence d'une base $\mathscr{B}$ vérifiant $(*)$.

Historiquement, l'ensemble des problèmes exposés ci-dessus ont étés résolus par les mathématiciens Weierstrass, Jordan et Frobenius entre 1868 et 1880.

Dans tout le chapitre, on désigne par $\mathbb{K}$ le corps $\mathbb{R}$ ou le corps $\mathbb{C}$.

Partie I Éléments propres d'un endomorphisme ou d'une matrice

Dans cette partie, on considère un endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$ où E est un espace vectoriel sur $\mathbb{K}$.

I.A - Généralités

Définition (Valeur propre) : On dit qu'un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de l'endomorphisme f s'il existe un vecteur $v \in E$ non nul tel que $f(v) = \lambda v$.

Définition (Vecteur propre) : On dit que $v \in E$ non nul est un vecteur propre de l'endomorphisme f s'il existe un scalaire $\lambda \in \mathbb{K}$ tel que $f(v) = \lambda v$.

Remarques 1 :

a) Un vecteur $v \in E$ non nul est un vecteur propre de f si et seulement si la droite vectorielle $\mathrm{Vect}(v)$ est stable par f.

b) L'équation $f(v) = \lambda v$ d'inconnue $(\lambda, v) \in \mathbb{K} \times E \setminus \{0_E\}$ est appelée équation aux éléments propres.

Exemple 1 : Soit $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ l'endomorphisme défini par $f : P \mapsto P + XP'$. On a $f(X) = 2X$, donc X est un vecteur propre de f pour la valeur propre 2.

Définition (Sous-espace propre) : Le sous-espace propre de f associé à une valeur propre $\lambda \in \mathbb{K}$ de f est le sous-espace vectoriel $E_\lambda(f) = \mathrm{Ker}(\lambda \mathrm{Id}_E - f)$.

Remarque 2 : Le sous-espace propre $E_\lambda(f)$ est l'ensemble constitué du vecteur nul et des vecteurs propres de f associés à la valeur propre λ.

Exemple 2 : En reprenant l'exemple précédent, on a en écrivant $P = aX^2 + bX + c$ avec $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ que

$$P \in E_2(f) \quad \Leftrightarrow \quad 2P - f(P) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad c - aX^2 = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = c = 0,$$

donc on a $E_2(f) = \mathrm{Vect}(X)$.

Définition (Spectre) : Le spectre de f, noté $\mathrm{Sp}(f)$, est l'ensemble des valeurs propres de f.

Théorème 1 : Une somme finie de sous-espaces propres de f associés à des valeurs propres deux à deux distinctes est directe.

Remarques 3 :

a) On en déduit que toute famille de vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes est libres.

b) Si E est de dimension finie, on en déduit que f admet au plus $\dim(E)$ valeurs propres distinctes.

Exemple 3 : Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on considère la fonction $f_\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f_\lambda : t \mapsto \mathrm{e}^{\lambda t}$. Si on note φ l'endomorphisme de $\mathscr{C}^\infty(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ défini par $\varphi : f \mapsto f'$, on remarque que

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad \varphi(f_\lambda) = \lambda f_\lambda,$$

donc la fonction f_λ est un vecteur propre de φ pour la valeur propre λ. On en déduit que si $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ sont des nombres distincts deux à deux, alors la famille $(f_{\lambda_1}, \dots, f_{\lambda_n})$ est libre.

I.B - Polynôme caractéristique d'un endomorphisme

Dans cette partie, on suppose que l'espace vectoriel E est de dimension finie.

Définition (Polynôme caractéristique) : Le polynôme caractéristique de f est l'application $\chi_f : \mathbb{K} \to \mathbb{K}$ définie par

$$\forall \lambda \in \mathbb{K}, \quad \chi_f(\lambda) = \det(\lambda \mathrm{Id}_E - f).$$

Proposition 1 : Le polynôme caractéristique de f est une fonction polynômiale de degré $\dim(E)$ dont le coefficient dominant est égal à 1.

Théorème 2 : Les valeurs propres de f sont les racines dans $\mathbb{K}$ du polynôme caractéristique χ_f.

Définition (Ordre de multiplicité d'une valeur propre) : L'ordre de multiplicité d'une valeur propre λ de l'endomorphisme f, notée $m_\lambda(f)$, est l'ordre de multiplicité de la racine λ dans le polynôme caractéristique χ_f.

Exemple 4 : On considère l'endomorphisme $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ défini par

$$\forall (x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\quad f(x,y,z)=(x+y+z,x+y+z,x+y+z).$$

Le polynôme caractéristique de l'endomorphisme f est

$$\chi_f(\lambda)=\begin{vmatrix}\lambda-1 & -1 & -1\\ -1 & \lambda-1 & -1\\ -1 & -1 & \lambda-1\end{vmatrix}\underset{C_1\leftarrow C_1+C_2+C_3}{=}\begin{vmatrix}\lambda-3 & -1 & -1\\ \lambda-3 & \lambda-1 & -1\\ \lambda-3 & -1 & \lambda-1\end{vmatrix}\underset{\substack{L_2\leftarrow L_2-L_1\\ L_3\leftarrow L_3-L_1}}{=}(\lambda-3)\begin{vmatrix}1 & -1 & -1\\ 0 & \lambda & 0\\ 0 & 0 & \lambda\end{vmatrix}=\lambda^2(\lambda-3).$$

D'après lé théorème précédent, on en déduit que les valeurs propres de l'endomorphisme f sont 0 et 3 avec pour multiplicité $m_0(f)=2$ et $m_3(f)=1$. De plus, on obtient par le calcul que les sous-espaces propres associés sont

$$E_0(f)=\mathrm{Vect}\big((1,0,-1),(0,1,-1)\big)\quad\text{et}\quad E_3(f)=\mathrm{Vect}\big((1,1,1)\big).$$

Théorème 3 : Si $\lambda\in\mathbb{K}$ est une valeur propre de f, alors on a l'inégalité

$$1\leqslant \dim(E_\lambda(f))\leqslant m_\lambda(f).$$

Exemple 5 : On considère l'endomorphisme $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ défini par

$$\forall (x,y,z)\in\mathbb{R}^3,\quad f(x,y,z)=(x,y+z,z).$$

Le polynôme caractéristique de l'endomorphisme f est $\chi_f(\lambda)=(\lambda-1)^3$. On en déduit que f admet une unique valeur propre qui est 1 et que sa multiplicité est $m_1(f)=3$. Le sous-espace propre associé est

$$E_1(f)=\mathrm{Vect}\big((1,0,0),(0,0,1)\big)$$

qui est de dimension 2.

I.C - Extension des notions aux matrices

Dans cette partie, on considère un entier $n\in\mathbb{N}^*$ et une matrice $M\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On identifie les éléments de $\mathbb{K}^n$ aux matrices colonnes de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Définition : Toutes les définitions précédentes s'adaptent aux matrices carrées.

(i) On dit que $\lambda\in\mathbb{K}$ est une valeur propre de M s'il existe un vecteur $V\in\mathbb{K}^n$ non nul tel que $MV=\lambda V$.

(ii) On dit que $V\in\mathbb{K}^n$ non nul est un vecteur propre de M s'il existe un scalaire $\lambda\in\mathbb{K}$ tel que $MV=\lambda V$.

(iii) Si $\lambda\in\mathbb{K}$ est une valeur propre de la matrice M, le sous-espace propre de M associé à λ est le sous-espace vectoriel $E_\lambda(M)=\mathrm{Ker}(\lambda\mathrm{I}_n-M)$.

(iv) Le spectre de M, noté $\mathrm{Sp}(M)$, est l'ensemble des valeurs propres de M.

(v) Le polynôme caractéristique de la matrice M est l'application $\chi_M:\mathbb{K}\to\mathbb{K}$ définie par

$$\forall\lambda\in\mathbb{K},\quad \chi_M(\lambda)=\det(\lambda\mathrm{I}_n-M).$$

Remarque 4 : L'équation $MV=\lambda V$ d'inconnue $(\lambda,V)\in\mathbb{K}\times\mathbb{K}^n\setminus\{0_{\mathbb{K}^n}\}$ est appelée équation aux éléments propres.

Théorème 4 : Une somme finie de sous-espaces propres de M associés à des valeurs propres deux à deux distinctes est directe.

Remarque 5 : On en déduit qu'une matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ admet au plus n valeurs propres distinctes.

Proposition 2 : Le polynôme caractéristique de M est une fonction polynômiale de degré n dont le coefficient dominant est égal à 1.

Théorème 5 : Les valeurs propres de la matrice M sont les racines racines du polynôme caractéristique χ_M.

Remarque 6 : Les valeurs propres d'une matrices triangulaires sont ses coefficients diagonaux.

Définition (Ordre de multiplicité d'une valeur propre) : L'ordre de multiplicité d'une valeur propre λ de la matrice M, noté $m_\lambda(M)$, est l'ordre de multiplicité de la racine λ dans le polynôme caractéristique χ_M.

Théorème 6 : Si $\lambda \in \mathbb{K}$ est une valeur propre de M, alors on a l'inégalité

$$1 \leqslant \dim(E_\lambda(M)) \leqslant m_\lambda(M).$$

Remarque 7 : Deux matrices semblables ont le même polynôme caractéristique, donc les mêmes valeurs propres avec mêmes multiplicités.

Bilan : Une fois que l'on a fixé une base $\mathscr{B}$ de l'espace vectoriel E, nous pouvons donc passer des objets définis dans le cadre des espaces vectoriels à des objets matriciels. Le tableau ci-dessous résume la correspondance entre ces deux aspects avec les notions de seconde année.

Représentation vectorielle	**Lien**	**Représentation matricielle**
$v \in E$	$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}$	$V \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$
$f \in \mathscr{L}(E)$	$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}$	$M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$
$v \in E_\lambda(f)$	$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}$	$V \in E_\lambda(M)$
$\mathrm{Sp}(f)$	$=$	$\mathrm{Sp}(M)$
χ_f	$=$	χ_M
$m_\lambda(f)$	$=$	$m_\lambda(M)$
$\mathrm{tr}(f)$	$=$	$\mathrm{tr}(M)$
$\det(f)$	$=$	$\det(M)$

Partie II Endomorphismes et matrices diagonalisables

II.A - Cas des endomorphismes

Dans cette partie, on considère un élément $f \in \mathscr{L}(E)$ où E est un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{K}$.

Définition (Endomorphisme diagonalisable) : L'endomorphisme f est diagonalisable s'il existe une base $\mathscr{B}$ de l'espace vectoriel E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ est diagonale.

Remarque 8 : On peut reformuler la définition précédente. L'endomorphisme f est diagonalisable si et seulement si il existe une base $\mathscr{B}$ de E constitué de vecteurs propres pour f.

Exemples 6 :

a) Soit $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ l'endomorphisme défini par $f : P \mapsto P + XP'$. Dans la base canonique $\mathscr{C} = (1, X, X^2)$ de l'espace vectoriel $\mathbb{R}_2[X]$, on a

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix},$$

donc l'endomorphisme f est diagonalisable.

b) Toute homothétie vectorielle de E est diagonalisable, car sa matrice dans toute base de E est diagonale.

c) Tout projecteur vectoriel $p \in \mathscr{L}(E)$ est diagonalisable, car si $\mathscr{B}$ est une base adaptée à la décomposition en somme directe $E = \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Ker}(p)$, on a

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(p) = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_r & \mathrm{O} \\ \mathrm{O} & \mathrm{O} \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad r = \mathrm{rang}(p).$$

d) Toute symétrie vectorielle $s \in \mathscr{L}(E)$ est diagonalisable, car si $\mathscr{B}$ est une base adaptée à la décomposition en somme directe $E = \mathrm{Ker}(s - \mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(s + \mathrm{Id}_E)$, on a

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(s) = \begin{pmatrix} \mathrm{I}_k & \mathrm{O} \\ \mathrm{O} & -\mathrm{I}_\ell \end{pmatrix} \quad \text{avec} \quad (k, \ell) \in \mathbb{N}^2.$$

Théorème 7 : L'endomorphisme f est diagonalisable si et seulement si $E = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f)} E_\lambda(f)$.

On rappelle qu'un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ est scindé sur $\mathbb{K}$ s'il s'écrit comme un produit de facteurs de degré 1 de $\mathbb{K}[X]$. Par le théorème de d'Alembert-Gauss, tous les polynômes de $\mathbb{C}[X]$ sont scindés sur $\mathbb{C}$. Par contre, ce n'est pas le cas de tous les polynômes de $\mathbb{R}[X]$: par exemple le polynôme $X^2 + 1 \in \mathbb{R}[X]$ n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$.

Théorème de caractérisation des endomorphismes diagonalisables : Les assertions suivantes sont équivalentes.

(i) L'endomorphisme f est diagonalisable.

(ii) On a la relation
$$\dim(E) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(f)} \dim(E_\lambda(f)).$$

(iii) Le polynôme caractéristique χ_f est scindé sur $\mathbb{K}$ et
$$\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(f), \quad \dim(E_\lambda(f)) = m_\lambda(f).$$

Corollaire 1 : Si l'endomorphisme f admet $\dim(E)$ valeurs propres distinctes, alors f est diagonalisable.

Remarque 9 : Dans ce cas, les sous-espaces propres de f sont des droites vectorielles.

ATTENTION : La réciproque du corollaire est fausse ! Par exemple, une homothétie est diagonalisable, mais elle admet une unique valeur propre.

II.B - Cas des matrices

Dans cette partie, on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et une matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. On identifie les éléments de $\mathbb{K}^n$ aux matrices colonnes de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{K})$.

Définition (Matrice diagonalisable) : La matrice M est diagonalisable si elle est semblable à une matrice diagonale.

Remarque 10 : Si $f \in \mathscr{L}(E)$ est un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie sur $\mathbb{K}$ et si $\mathscr{B}$ est une base de E, alors il résulte de la définition précédente et de la formule du changement de base que l'on a l'équivalence

$$f \text{ est diagonalisable} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \text{ est diagonalisable.}$$

Théorème 8 : La matrice M est diagonalisable si et seulement si $\mathbb{K}^n = \bigoplus_{\lambda \in \mathrm{Sp}(M)} E_\lambda(M)$.

Théorème de caractérisation des matrices diagonalisables : Les assertions suivantes sont équivalentes.

(i) La matrice M est diagonalisable.

(ii) On a la relation
$$\dim\left(\mathbb{K}^n\right) = \sum_{\lambda \in \mathrm{Sp}(M)} \dim(E_\lambda(M)).$$

(iii) Le polynôme caractéristique χ_M est scindé sur $\mathbb{K}$ et
$$\forall \lambda \in \mathrm{Sp}(M), \quad \dim(E_\lambda(M)) = m_\lambda(M).$$

Corollaire 2 : Si la matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ admet n valeurs propres distinctes, alors M est diagonalisable.

Remarque 11 : Dans ce cas, les sous-espaces propres de M sont des droites vectorielles.

ATTENTION : La réciproque du corolaire est fausse ! Par exemple, une matrice de la forme $M = \lambda \mathrm{I}_n$ avec $\lambda \in \mathbb{K}$ est diagonalisable, mais elle admet une unique valeur propre.

II.C - Méthode - Diagonaliser une matrice

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ que l'on souhaite diagonaliser si possible sur $\mathbb{K}$.

1) On calcule le polynôme caractéristique de A.
   a) Si χ_A n'est pas scindé sur $\mathbb{K}$, alors la matrice A n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{K}$. On conclut que l'on ne peut pas la diagonaliser sur $\mathbb{K}$.
   b) Sinon, on note $\lambda_1, \dots, \lambda_p \in \mathbb{K}$ les valeurs propres de A.
2) On détermine une base $\mathscr{B}_k$ de chaque sous-espace propre $E_{\lambda_k}(A)$ de A.
   a) Si pour une valeur propre λ_k de A, on a $\dim(E_{\lambda_k}(A)) < m_{\lambda_k}(A)$, alors la matrice A n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{K}$. On conclut que l'on ne peut pas la diagonaliser sur $\mathbb{K}$.
   b) Sinon, on passe au point suivant.
3) On note $\mathscr{B} = (\mathscr{B}_1, \dots, \mathscr{B}_p)$ qui est une base de l'espace vectoriel $\mathbb{K}^n$. Si $\mathscr{C}$ est la base canonique de $\mathbb{K}^n$, on a par la formule du changement de base

$$A = PDP^{-1} \quad \text{avec} \quad P = P_{\mathscr{C} \to \mathscr{B}}$$

et $D \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est la matrice diagonale

$$D = \mathrm{Diag}(\underbrace{\lambda_1, \dots, \lambda_1}_{m_{\lambda_1}(A)}, \underbrace{\lambda_2, \dots, \lambda_2}_{m_{\lambda_2}(A)}, \dots, \underbrace{\lambda_p, \dots, \lambda_p}_{m_{\lambda_p}(A)}).$$

Exemple 7 : On souhaite diagonaliser sur $\mathbb{R}$ la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}).$$

Son polynôme caractéristique est

$$\chi_A(\lambda) = \det(\lambda \mathrm{I}_2 - A) = \begin{vmatrix} \lambda & 1 \\ -1 & \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 + 1.$$

Le polynôme χ_A n'est pas scindé sur $\mathbb{R}$, car son discriminant est strictement négatif. On en déduit que A n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

Exemple 8 : On reprend la matrice A de l'exemple précédent que l'on souhaite diagonaliser sur $\mathbb{C}$. Son polynôme caractéristique est $\chi_A(\lambda) = \lambda^2 + 1 = (\lambda - \mathrm{i})(\lambda + \mathrm{i})$ qui est scindé sur $\mathbb{C}$. On en déduit que $\mathrm{Sp}(A) = \{\mathrm{i}, -\mathrm{i}\}$. On détermine une base de chacun des sous-espaces propres.

$$E_{\mathrm{i}}(A) = \mathrm{Ker}(\mathrm{i}\,\mathrm{I}_2 - A) = \mathrm{Ker}\left(\begin{pmatrix} \mathrm{i} & 1 \\ -1 & \mathrm{i} \end{pmatrix}\right) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -\mathrm{i} \end{pmatrix}\right),$$

$$E_{-\mathrm{i}}(A) = \mathrm{Ker}(-\mathrm{i}\,\mathrm{I}_2 - A) = \mathrm{Ker}\left(\begin{pmatrix} -\mathrm{i} & 1 \\ -1 & -\mathrm{i} \end{pmatrix}\right) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix}\right).$$

Comme on a $\dim\left(\mathbb{C}^2\right) = \dim E_{\mathrm{i}}(A) + \dim E_{-\mathrm{i}}(A)$, on en déduit que A est diagonalisable sur $\mathbb{C}$. Finalement, on a

$$A = PDP^{-1} \quad \text{avec} \quad P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -\mathrm{i} & \mathrm{i} \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad D = \begin{pmatrix} \mathrm{i} & 0 \\ 0 & -\mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

Remarque 12 : On constate dans l'exemple ci-dessus que les vecteurs propres sont conjugués. De manière générale, si $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ est une valeur propre d'une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, alors le nombre $\bar{\lambda}$ est une valeur propre de A et les sous-espaces propres associés sont conjugués. En effet, on a

$$V \in E_\lambda(A) \;\Leftrightarrow\; AV = \lambda V \underset{\substack{\text{Conjugaison} \\ A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})}}{\Longleftrightarrow} A\overline{V} = \bar{\lambda}\,\overline{V} \;\Leftrightarrow\; \overline{V} \in E_{\bar{\lambda}}(A).$$

En particulier, si on a $E_\lambda(A) = \mathrm{Vect}(V_1, \dots, V_p)$, alors $E_{\bar{\lambda}}(A) = \mathrm{Vect}\left(\overline{V_1}, \dots, \overline{V_p}\right)$.

Exemple 9 : On souhaite diagonaliser sur $\mathbb{R}$ la matrice

$$A=\begin{pmatrix}1&1\\0&1\end{pmatrix}\in\mathscr{M}_2(\mathbb{R}).$$

Son polynôme caractéristique est

$$\chi_A(\lambda)=\det(\lambda\mathrm{I}_2-A)=\begin{vmatrix}\lambda-1&-1\\0&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-1)^2.$$

qui est un polynôme scindé sur $\mathbb{R}$. On en déduit que $\mathrm{Sp}(A)=\{1\}$. On détermine le sous-espace propre associé.

$$E_1(A)=\mathrm{Ker}(\mathrm{I}_2-A)=\mathrm{Ker}\left(\begin{pmatrix}0&-1\\0&0\end{pmatrix}\right)=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right).$$

On remarque que $\dim E_1(A)=1<2=m_1(A)$, donc la matrice A n'est pas diagonalisable sur $\mathbb{R}$.

Exemple 10 : On souhaite diagonaliser sur $\mathbb{R}$ la matrice

$$A=\begin{pmatrix}2&1&1\\1&2&1\\1&1&2\end{pmatrix}\in\mathscr{M}_3(\mathbb{R}).$$

En utilisant l'opération élémentaire $C_1\leftarrow C_1+C_2+C_3$, on obtient que

$$\chi_A(\lambda)=\det(\lambda\mathrm{I}_3-A)=\begin{vmatrix}\lambda-2&-1&-1\\-1&\lambda-2&-1\\-1&-1&\lambda-2\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\lambda-4&-1&-1\\\lambda-4&\lambda-2&-1\\\lambda-4&-1&\lambda-2\end{vmatrix}=(\lambda-4)\begin{vmatrix}1&-1&-1\\1&\lambda-2&-1\\1&-1&\lambda-2\end{vmatrix}.$$

De plus, en utilisant $L_2\leftarrow L_2-L_1$ et $L_3\leftarrow L_3-L_1$, on obtient que le polynôme caractéristique de A est

$$\chi_A(\lambda)=(\lambda-4)\begin{vmatrix}1&-1&-1\\0&\lambda-1&0\\0&0&\lambda-1\end{vmatrix}=(\lambda-4)(\lambda-1)^2.$$

qui est un polynôme scindé sur $\mathbb{R}$. Les valeurs propres de A sont 1 et 4. On détermine une base de chacun des sous-espaces propres.

$$E_1(A)=\mathrm{Ker}(\mathrm{I}_3-A)=\mathrm{Ker}\left(\begin{pmatrix}-1&-1&-1\\-1&-1&-1\\-1&-1&-1\end{pmatrix}\right)=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}\right),$$

$$E_4(A)=\mathrm{Ker}(4\mathrm{I}_3-A)=\mathrm{Ker}\left(\begin{pmatrix}2&-1&-1\\-1&2&-1\\-1&-1&2\end{pmatrix}\right)=\mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\right).$$

Comme on a $\dim\left(\mathbb{R}^3\right)=\dim E_1(A)+\dim E_4(A)$, on en déduit que A est diagonalisable sur $\mathbb{R}$. Finalement, on a

$$A=PDP^{-1}\quad\text{avec}\quad P=\begin{pmatrix}1&1&1\\-1&0&1\\0&-1&1\end{pmatrix}\quad\text{et}\quad D=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&4\end{pmatrix}.$$

Remarque 13 : Lorsque l'on a réussi à diagonaliser une matrice $A\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, il est facile de calculer ses puissances. En effet, si on peut écrire $A=PDP^{-1}$ avec une matrice diagonale $D\in\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et une matrice inversible $P\in\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, alors pour tout $k\in\mathbb{N}$, on a la relation

$$A^k=(PDP^{-1})^k=(PD\underbrace{P^{-1})(P}_{\mathrm{I}_n}D\underbrace{P^{-1})(P}_{\mathrm{I}_n}DP^{-1})\cdots(PD\underbrace{P^{-1})(P}_{\mathrm{I}_n}DP^{-1})=PD^kP^{-1},$$

donc on peut calculer A^k car l'on connait P, D^k et P^{-1}.

Exemple 11 : On souhaite calculer les puissances de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}).$$

D'après l'exemple précédent, on a

$$A = \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}}_{P} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}}_{D} \underbrace{\begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & -2/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix}}_{P^{-1}}.$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on en déduit que

$$\begin{aligned} A^k &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}^k \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & -2/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1/3 & -2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & -2/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1/3 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 4^k+2 & 4^k-1 & 4^k-1 \\ 4^k-1 & 4^k+2 & 4^k-1 \\ 4^k-1 & 4^k-1 & 4^k+2 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Partie III Endomorphismes et matrices trigonalisables

III.A - Cas des endomorphismes

Dans cette partie, on considère un élément $f \in \mathscr{L}(E)$ où E est un espace vectoriel de dimension finie sur $\mathbb{K}$.

Définition (Endomorphisme trigonalisable) : L'endomorphisme f est trigonalisable s'il existe une base $\mathscr{B}$ de l'espace vectoriel E telle que $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ est triangulaire.

Remarque 14 : On peut démontrer que l'on obtient une définition équivalente de trigonalisable en remplaçant la mention « triangulaire » par « triangulaire supérieure ».

Théorème de caractérisation des endomorphismes trigonalisables : L'endomorphisme f est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique χ_f est scindé sur $\mathbb{K}$.

DÉMONSTRATION ADMISE

Corollaire 3 : Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, tout endomorphisme de E est trigonalisable.

Théorème 9 : On suppose que χ_f est scindé sur $\mathbb{K}$. Si $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ sont les valeurs propres de f comptées avec multiplicité, alors

$$\mathrm{tr}(f) = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n \quad \text{et} \quad \det(f) = \lambda_1 \cdots \lambda_n.$$

Remarques 15 :

a) Si $\mathbb{K} = \mathbb{C}$, les formules précédentes sont toujours vérifiées, car tout polynôme de $\mathbb{C}[X]$ est scindé sur $\mathbb{C}$.

b) On en déduit avec les relations entre les coefficients et les racines d'un polynôme que

$$\chi_f(\lambda) = \lambda^{\dim(E)} - \mathrm{tr}(f)\lambda^{\dim(E)-1} + \cdots + (-1)^{\dim(E)} \det(f).$$

Exemple 12 : On considère l'endomorphisme $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ défini par

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad f(x, y, z) = (2x + y + z, x + 2y + z, x + y + 2z).$$

Le polynôme caractéristique de f est $\chi_f(\lambda) = (\lambda - 1)^2(\lambda - 4)$. Les valeurs propres de l'endomorphisme f sont 1 et 4 avec les multiplicités $m_1(f) = 2$ et $m_4(f) = 1$. Le polynôme χ_f est scindé sur $\mathbb{R}$ et on a

$$\mathrm{tr}(f) = 1 + 1 + 4 = 6 \quad \text{et} \quad \det(f) = 1 \times 1 \times 4 = 4.$$

III.B - Cas des matrices

Dans cette partie, on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et une matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Définition (Matrice trigonalisable) : La matrice M est trigonalisable si M elle est semblable à une matrice triangulaire.

Remarque 16 : Si $f \in \mathscr{L}(E)$ est un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie sur $\mathbb{K}$ et si $\mathscr{B}$ est une base de E, alors il résulte de la définition précédente et de la formule du changement de base que l'on a l'équivalence

$$f \text{ est trigonalisable} \quad \Leftrightarrow \quad \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \text{ est trigonalisable.}$$

Théorème de caractérisation des matrices trigonalisables : La matrice M est trigonalisable si et seulement si son polynôme caractéristique χ_M est scindé sur $\mathbb{K}$.

DÉMONSTRATION ADMISE

Corollaire 4 : Toute matrice de $\mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ est trigonalisable.

Théorème 10 : On suppose que χ_M est scindé sur $\mathbb{K}$. Si $\lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{K}$ sont les valeurs propres de M comptées avec multiplicité, alors

$$\mathrm{tr}(M) = \lambda_1 + \cdots + \lambda_n \quad \text{et} \quad \det(M) = \lambda_1 \cdots \lambda_n.$$

Remarques 17 :

a) Si on considère les valeurs propres complexes de M, les formules précédentes sont vérifiées.

b) On en déduit avec les relations entre les coefficients et les racines d'un polynôme que

$$\chi_M(\lambda) = \lambda^n - \mathrm{tr}(M)\lambda^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(M).$$

III.C - Méthode - Trigonaliser une matrice

Le programme ne demande pas de savoir trigonaliser de manière effective une matrice. Il faut se laisser guider par les énoncés des exercices.

Remarque 18 : Lorsque l'on a réussi à trigonaliser une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, il est souvent possible de calculer ses puissances. En effet, si on peut écrire $A = PTP^{-1}$ avec une matrice triangulaire $T \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et une matrice inversible $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, alors on a la relation

$$\forall k \in \mathbb{N}, \quad A^k = PT^kP^{-1}.$$

Pour conclure, il faut réussir à calculer T^k pour en déduire A^k.

Exemple 13 : On souhaite calculer les puissance de la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}).$$

Son polynôme caractéristique est $\chi_A(\lambda) = (\lambda - 2)^2$ et on a

$$E_2(A) = \mathrm{Ker}(A - \mathrm{I}_2) = \mathrm{Ker}\left(\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\right) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right).$$

On en déduit que la matrice A n'est pas diagonalisable. Pour trigonaliser la matrice A, il suffit de compléter le vecteur propre ci-dessus en choisissant un second vecteur non colinéaire à ce dernier, puis de poser

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathrm{GL}_2(\mathbb{R}) \qquad \text{et} \qquad T = P^{-1}AP = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on en déduit que

$$A^k = PT^kP^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}^k\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^k & -k2^{k-1} \\ 0 & 2^k \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{k-1}(2-k) & -k2^{k-1} \\ k2^{k-1} & 2^{k-1}(2+k) \end{pmatrix}.$$