Mathématiques

PT

Lycée Couffignal

BANQUE PT

Préparation aux oraux
Session 2024

Sommaire

I Coefficients des épreuves en fonction des concours 2

II Mathématiques I 3

III Mathématiques et Algorithmique 12

A - Planches de mathématiques 12

B - Informatique - Planches à dominante algorithmique 23

C - Informatique - Planches à dominante simulation numérique 34

IV Concours Mines -Télécom 40

Partie I Coefficients des épreuves en fonction des concours

Voici le tableau résumant les coefficients des épreuves orales de mathématiques et d'informatique selon les différents concours de la banque PT.

Écoles	Math. I	Math. et Algo.	Total
Concours Centrale-Supélec	13	13	100
Concours Commun Mines Ponts	9	0	41
Concours Commun Arts et Métiers	0	4	33
Concours Commun INP	0	8	40
Concours ENS Paris-Saclay	4	0	27
Concours ENS Rennes	4	0	27
École Polytechnique	21	0	114

Il faut également ajouter au tableau précédent le concours Mines-Télécom qui dispose d'une épreuve orale spécifique de mathématiques.

Écoles	Mathématiques	Total
Concours Mines-Télécom	8	30

Partie II Mathématiques I

Modalités de l'épreuve : L'épreuve dure 30 minutes sans temps de préparation.

Au moins un exercice et des questions de cours sont posés. Même si l'épreuve est destinée à juger la rigueur et le formalisme, le candidat ou la candidate est fortement invitée à exprimer ses idées et ses pistes de réflexion, qui même non abouties, seront appréciées.

Planche 1 — Mathématiques I - Année 2023

Exercice. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes. On suppose que X et Y suivent une loi géométrique de paramètre $p \in]0,1[$ et on note $q = 1-p$.

1. Rappeler la définition de la loi géométrique.
2. Déterminer la loi de $U = X + Y$.
3. Soit $\ell \in U(\Omega)$. Déterminer la loi de X sachant $(U = \ell)$.
4. Déterminer la loi de $V = X - Y$ et son espérance.
5. Déterminer la covariance de X et Y.

Cours. Donner la définition de deux matrices semblables et leurs propriétés.

Planche 2 — Mathématiques I - Année 2022

Exercice. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^\pi \sin^{2n}(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer avec une intégration par parties que $I_n = \dfrac{\pi(2n)!}{4^n(n!)^2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Soit $t \in \mathbb{R}$. Montrer que la fonction $f_t : x \mapsto \cos(x\sin(t))$ est développable en série entière et indiquer le rayon de convergence de la série entière obtenue.
3. En déduire le développement en série entière de $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^\pi \cos(x\sin(t))\,\mathrm{d}t$.

Cours. Donner la définition d'un point critique, puis expliquer comment déterminer les extremums d'une fonction à 2 variables.

Planche 3 — Mathématiques I - Année 2022

Exercice. On considère deux variables aléatoires X et Y à valeurs dans $\mathbb{N}$.

1. Donner la fonction génératrice d'une loi de Bernoulli, puis d'une loi binomiale
2. Montrer que si $G_X = G_Y$ sur $]-1,1[$, alors $P(X=k) = P(Y=k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$.
3. On suppose que X est de variance finie. Exprimer $\mathrm{E}(X)$ et $\mathrm{V}(X)$ avec $G'_X(1)$ et $G''_X(1)$.
4. Retrouver l'espérance et la variance d'une loi binomiale avec les formules précédentes.
5. Montrer que si X et Y sont indépendantes, alors on a $G_{X+Y} = G_X G_Y$ sur $]-1,1[$.

Cours. Rappeler les propriétés de la trace $\mathrm{tr} : \mathscr{M}_n(\mathbb{C}) \to \mathbb{C}$. Cette application est-elle injective ?

Planche 4 — Mathématiques I - Année 2022

Exercice. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} -7 & 12 \\ -6 & 10 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$$

On considère également les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par $u_0 = a$, $v_0 = b$ et

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad u_{n+1} = -7u_n + 12v_n \quad \text{et} \quad v_{n+1} = -6u_n + 10v_n.$$

1. La matrice A est-elle diagonalisable ? Si oui, la diagonaliser.
2. On suppose que $a = b = 1$. En utilisant la question précédente, déterminer un équivalent de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
3. Montrer que $\lim\limits_{n\to+\infty} u_n = +\infty$ si et seulement si $3b - 2a > 0$.

Cours. Énoncer les inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev en explicitant le lien entre les deux.

Planche 5 — Mathématiques I - Année 2021

Exercice. On considère une suite de variables aléatoires $(X_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ indépendantes suivant une loi de Poisson de paramètre 1. On définit les variables aléatoires

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad S_n = X_1 + \cdots + X_n, \quad T_n = \frac{S_n - n}{\sqrt{n}}.$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la loi de S_n, puis son espérance et sa variance. En déduire l'espérance et la variance de T_n.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer la fonction génératrice G_{S_n} de S_n en précisant son ensemble de définition.
3. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $t \in \mathbb{R}_+$. Montrer que t^{T_n} est d'espérance finie et que $\mathrm{E}(t^{T_n}) = \dfrac{G_{S_n}(t^{1/\sqrt{n}})}{t^{\sqrt{n}}}$.
4. Étudier la limite de $\mathrm{E}(t^{T_n})$ lorsque $n \to +\infty$.

Cours. Rappeler l'expression de la trace et du déterminant d'une matrice en fonction de ses valeurs propres.

Planche 6 — Mathématiques I - Année 2021

Exercice. On considère pour tout $m \in \mathbb{R}$ le cercle d'équation $(x-(m-1))^2 + (y-m)^2 = m^2$.

1. Déterminer une droite passant par l'ensemble des centres de $\mathscr{C}_m$ pour $m \in \mathbb{R}$.
2. Déterminer les droites du plan qui sont tangentes à tous les cercles $\mathscr{C}_m$ pour $m \in \mathbb{R}$.
3. Soit $\mathscr{C}$ le cercle de centre l'origine et de rayon 1. Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur le nombre $m \in \mathbb{R}$ pour que l'intersection entre $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}_m$ soit non vide.

Cours. Rappeler la formule du binôme de Newton pour des matrices.

Planche 7 — Mathématiques I - Année 2019

Exercice. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On désigne par $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_{2n+1})$ la base canonique de $\mathbb{R}^{2n+1}$ et on définit l'endomorphisme $T \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^{2n+1})$ par

$$T(e_{n+1}) = \sum_{i=1}^{2n+1} e_i \quad \text{et} \quad \forall k \in [\![1, 2n+1]\!] \setminus \{n+1\}, \quad T(e_k) = e_1.$$

1. Écrire la matrice de T dans la base $\mathscr{B}$.
2. Dans cette question uniquement, on suppose que $n = 1$. Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de T. L'endomorphisme T est-il diagonalisable ? bijectif ?
3. Montrer que l'on peut définir un endomorphisme $\tilde{T}$ de $\mathrm{Im}(T)$ par $\tilde{T}(x) = T(x)$ pour tout $x \in \mathrm{Im}(T)$.
4. Montrer que $\left(e_1, \sum_{i=1}^{2n+1} e_i\right)$ est une base de $\mathrm{Im}(T)$ et écrire la matrice de $\tilde{T}$ dans cette base.

Cours. Rappeler la formule de Taylor-Young à l'ordre $n \in \mathbb{N}$; le développement limité à l'ordre n en 0 de la fonction $x \mapsto \sqrt{1+x}$. Peut-on simplifier $\alpha(\alpha-1)\cdots(\alpha-n+1)$ sous forme de factorielle lorsque $\alpha = 1/2$?

Planche 8 — Mathématiques I - Année 2019

Exercice. On souhaite déterminer les fonctions $f : U \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ avec $U = \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*$ vérifiant

$$\forall (x,y) \in U, \quad x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) - y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0.$$

On considère le changement de variables $(u,v) = (xy, y/x)$ et on définit $F(u,v) = f(x,y)$ pour tout $(u,v) \in U$.

1. Exprimer $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$ en fonctions des dérivées partielles de F.
2. Montrer que l'équation de départ devient $\dfrac{\partial F}{\partial v} - 2u \dfrac{\partial^2 F}{\partial u \partial v}$, puis la résoudre.

Cours. Énoncer le théorème spectral. Rappeler la définition d'un point régulier d'une surface définie par une équation $f(x,y,z) = 0$.

Planche 9 — Mathématiques I - Année 2019

Exercice. Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère une matrice symétrique $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ non nulle.

1. Justifier qu'il existe une matrice diagonale $D \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et une matrice $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ telles que $A = PDP^\top$.
2. Montrer que $\mathrm{tr}(A) = \mathrm{tr}(D)$ et que $\mathrm{tr}(A^2) \geqslant 0$.
3. Montrer que pour tout $(x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p$, on a $\left(\sum_{k=1}^p x_k\right)^2 \leqslant p \sum_{k=1}^p x_k^2$.
4. En déduire que $\mathrm{rang}(A) \geqslant \dfrac{\mathrm{tr}(A)^2}{\mathrm{tr}(A^2)}$ et étudier le cas d'égalité.

Cours. Expliquer la méthode des rectangles ; quelle est la somme obtenue ? Déterminer $\lim\limits_{n\to+\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \dfrac{1}{k^2+n^2}$.

Planche 10 — **Mathématiques I - Année 2019**

Exercice. Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère un sous-espace vectoriel F de $\mathbb{R}^n$ et on désigne par p_F le projecteur orthogonal sur F et par s_F la symétrie orthogonale par rapport à F.

1. Que dire de l'application $s_F \circ p_F - p_F \circ s_F$?
2. Les endomorphismes s_F et p_F sont-ils orthogonaux?
3. Donner la trace et le déterminant de s_F et p_F.
4. Dans cette question, on suppose que $F = \{(x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y+z+t=0,\ \ x-y+z-t=0\}$.
   (a) Déterminer les matrices de p_F, s_F et $s_F \circ p_F + p_F \circ s_F$ dans la base canonique de $\mathbb{R}^4$.
   (b) Identifier l'endomorphisme $s_F \circ p_F + p_F \circ s_F$.

Cours. Donner le développement en série entière des fonctions cos et $\cos^2$. Pourquoi le rayon de convergence est-il infini ?

Planche 11 — **Mathématiques I - Année 2019**

Exercice. On considère l'équation différentielle $xy'' + y' + xy = 0$ notée (E) et la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_0^{\pi/2} \cos(x\sin(t))\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est solution de (E) à l'aide d'une intégration par parties sur l'expression de f'.
3. Soit $\phi :]0,\pi[\to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ telle que $g(x) = f(x)\phi(x)$.
   (a) Montrer que g est solution de (E) si et seulement si ϕ' est solution d'une équation différentielle du premier ordre que l'on précisera.
   (b) En déduire l'ensemble des solutions de (E).

Cours. Rappeler la définition du produit mixte dans $\mathbb{R}^3$, ses propriétés et son interprétation dans $\mathbb{R}^3$.

Planche 12 — **Mathématiques I - Année 2019**

Exercice. On considère un nombre $a \in \mathbb{R}$ et la matrice

$$M_a = \begin{pmatrix} 0 & a & 1 \\ a & 0 & 1 \\ a & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer le rang de la matrice M_a en fonction de a.
2. Déterminer le polynôme caractéristique et les valeurs propres de la matrice M_a.
3. Pour quelles valeurs de a la matrice M_a est-elle diagonalisable ?

Cours. Définir la série géométrique. Calculer la série géométrique dérivée. Calculer la somme de $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{2n+3}{5^n}$.

Planche 13 — Mathématiques I - Année 2019

Exercice. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et $u_{n+1} = u_n + \dfrac{1}{u_n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Étudier la monotonie et la convergence de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
2. La série $\sum \dfrac{1}{u_n}$ est-elle convergente ?
3. On admet que si $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont deux suites de nombres réels équivalentes telles que $\sum_{n\geqslant 0} b_n$ diverge, alors $\sum_{k=0}^{n} a_k \underset{n\to+\infty}{\sim} \sum_{k=0}^{n} b_k$.
   (a) Déterminer la limite de $u_{n+1}^2 - u_n^2$ et en déduire un équivalent de $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$.
   (b) Trouver un équivalent de $H_n = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{k}$ et en déduire un équivalent de $\sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{u_k^2}$.

Cours. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois géométriques de paramètre respectif $1/2$ et $1/3$. Calculer $P(X = Y)$.

Planche 14 — Mathématiques I - Année 2018

Exercice. Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel et $u \in \mathscr{L}(E)$ tel que $u \circ u + u - 6\mathrm{Id}_E = 0$, $u \neq 2\mathrm{Id}_E$ et $u \neq -3\mathrm{Id}_E$.

1. Montrer que u est un automorphisme. Exprimer u^{-1} en fonction de u et Id_E.
2. Soit le sous-espace vectoriel $F = \mathrm{Vect}(\mathrm{Id}_E, u)$ de $\mathscr{L}(E)$. Déterminer la dimension de F.
3. Montrer que $E = \mathrm{Ker}(u - 2\mathrm{Id}_E) \oplus \mathrm{Ker}(u + 3\mathrm{Id}_E)$.

Cours. Rappeler la définition de la loi de Poisson. Calculer sa variance.

Planche 15 — Mathématiques I - Année 2018

Exercice. On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $u_0 > 0$ et $u_{n+1} = u_n^2 + u_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Montrer que pour tout $x > 0$, on a $0 < \ln(1 + x) < x$.
2. Soient $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ deux suites réelles.
   (a) Montrer que $\mathrm{e}^{x_n} \sim \mathrm{e}^{y_n}$ si et seulement si $\lim\limits_{n\to+\infty} (x_n - y_n) = 0$.
   (b) Si $x_n \sim y_n$, peut-on affirmer que $\mathrm{e}^{x_n} \sim \mathrm{e}^{y_n}$?
3. Montrer que $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante à valeur positive.
4. Montrer que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ diverge.
5. On note $v_n = 2^{-n}\ln(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Étudier la convergence de $\sum_{n\geqslant 0} (v_{n+1} - v_n)$.

Cours. Définir une somme géométrique. Calculer la somme $\sum_{k=0}^{n} \cos(kt)$ pour $n \in \mathbb{N}$ et $t \in \mathbb{R}$.

Planche 16 — Mathématiques I - Année 2018

Exercice. Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres réels à termes positifs.

1. Étudier la nature de la série $\sum \dfrac{u_n}{1+nu_n}$ dans les trois cas suivants.

$$(i)\ \lim_{n\to\infty} u_n = 1\,; \qquad (ii)\ \forall n\in\mathbb{N}^*,\ u_n = \frac{1}{n}\,; \qquad (iii)\ u_n = \begin{cases} 1 & \text{s'il existe } m\in\mathbb{N} \text{ tel que } n = 2^m - 1 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

2. Quel est la nature de la série $\sum \dfrac{u_n}{1+n^2u_n}$?
3. Montrez que si $\sum \dfrac{u_n}{1+u_n}$ converge, alors $\lim\limits_{n\to\infty} u_n = 0$.
4. En déduire que $\sum u_n$ converge si et seulement si $\sum \dfrac{u_n}{1+u_n}$ converge.

Cours. Soit $a\in\mathbb{R}$ On considère les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad B_a = \begin{pmatrix} 1+a & 1 & 1 \\ 1 & 1+a & 1 \\ 1 & 1 & 1+a \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}).$$

1. La matrice A est-elle diagonalisable ? Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de A.
2. La matrice B_a est-elle diagonalisable ? Déterminer les valeurs propres et les sous-espaces propres de B_a.

Planche 17 — Mathématiques I - Année 2018

Exercice. Soit $n\in\mathbb{N}$ avec $n\geqslant 3$. On considère $(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{R}^n$ et la matrice

$$A_n = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 & \cdots & a_n \\ a_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}).$$

1. La matrice A_n est-elle diagonalisable ? Déterminer ses valeurs propres lorsque $n = 3$.
2. Montrer que $\operatorname{rang}(A_n)\leqslant 2$, puis que A_n admet au plus trois valeurs propres distinctes.
3. Soit $(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2$ tel que $\operatorname{Sp}(A_n) = \{0,\lambda,\mu\}$. Calculer $\lambda+\mu$ et $\lambda^2+\mu^2$.
4. En déduire le polynôme caractéristique de A_n.

Cours. Rappeler les inégalités de Markov et de Bienaymé-Tchebychev, puis la loi faible des grands nombres.

Planche 18 — Mathématiques I - Année 2017

Exercice. Soit $b \in \mathbb{R}^*$. On considère la courbe paramétrée $f : [-\pi, \pi] \to \mathbb{R}$ définie par $f : t \mapsto (\cos(3t), b\sin^3(t))$.

1. Restreindre l'intervalle d'étude de f.
2. On suppose que $b = 1$.
   (a) Déterminer les points doubles et un vecteur directeur de la tangente en ces points.
   (b) Donner un développement limité de f en 0. Que peut-on en déduire ? Donner l'allure de la courbe au voisinage du point de coordonnées $(1, 0)$.
   (c) Donner les variations de x et y, puis tracer la courbe paramétrée.
3. Dans le cas général, comparer les courbes obtenues pour b et $-b$. Comment déduit-on toutes les courbes du cas $b = 1$?

Cours. Rappeler la définition de la loi de Poisson. Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes suivant des lois de Poisson de paramètre respectif λ et μ, que peut-on dire de la loi de $X + Y$?

Planche 19 — Mathématiques I - Année 2017

Exercice. On désigne par E l'ensemble des fonctions continues $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ telles que $t \mapsto f^2(t)\mathrm{e}^{-t}$ est intégrable sur $[0, +\infty[$.

1. Montrer que pour tout $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, on a $|ab| \leqslant \dfrac{1}{2}(a^2 + b^2)$.
2. Montrer que l'application $\varphi : (f, g) \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)g(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ est bien définie et est un produit scalaire sur E.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction définie par $L_n(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{n!}\dfrac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}x^n}\left(x^n\mathrm{e}^{-x}\right)$ est un polynôme de degré n.
4. Montrer que la famille $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est orthonormale.
5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer la distance de X^n au sous-espace vectoriel $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.

Cours. Rappeler le développement en série entière de $x \mapsto \ln(1 + x)$; préciser le rayon de convergence. Rappeler l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Planche 20 — Mathématiques I - Année 2017

Exercice. On munit l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ de son produit scalaire usuel et on considère une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $\|AX\| \leqslant \|X\|$ pour tout $X \in \mathbb{R}^n$.

1. Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Comparer les spectres de M et $M^\top$.
2. Montrer que $(X \mid A^\top Y) \leqslant \|X\|\|Y\|$ pour tout $(X, Y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$.
3. Montrer que $\|A^\top X\| \leqslant \|X\|$ pour tout $X \in \mathbb{R}^n$.
4. Montrer que toute valeur propre de A est de module au plus égal à 1.
5. On suppose que $1 \in \mathrm{Sp}(A)$. Calculer $\|A^\top X - X\|$ lorsque $X \in E_1(A)$.

Cours. Rappeler le développement en série entière de cos ; préciser le rayon de convergence. Donner une primitive de la fonction $x \mapsto (1 - x^2)^{-1/2}$.

Planche 21 — **Mathématiques I - Année 2016**

Exercice. On considère la fonction $f : \mathbb{C} \setminus \{-2\} \to \mathbb{C}$ définie par $f : z \mapsto \dfrac{z}{z+2}$.

1. Déterminer les points invariants de f.
2. Montrer que f est une bijection de $\mathbb{C} \setminus \{-2\}$ sur un ensemble E à déterminer.
3. Déterminer les $z \in \mathbb{C} \setminus \{-2\}$ tels que $f(z) \in \mathbb{R}$. Même question avec la condition $f(z) \in \mathrm{i}\mathbb{R}$.
4. Soit $z \in \mathbb{C} \setminus \{-2\}$. Déterminer une relation entre les modules des nombres complexes $f(z)-1$ et $z+2$, puis une relation entre leur argument.
5. Soit $R > 0$. Déterminer $f(C)$ avec $C = \{z \in \mathbb{C} \setminus \{-2\} \mid |z+2| < R\}$.

Cours. Calculer la somme $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n2^n}$.

Planche 22 — **Mathématiques I - Année 2016**

Exercice. On considère la fonction f d'une variable réelle définie par $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{x+t}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et exprimer sa dérivée sous la forme d'une intégrale.
3. Déterminer la limite de f en $+\infty$ et en 0^+.
4. Déterminer un équivalent de f en 0^+.

Cours. Rappeler la définition de la loi binomiale. Rappeler la définition de l'abscisse curviligne. Énoncer le théorème des accroissements finis.

Planche 23 — **Mathématiques I - Année 2016**

Exercice. La cible d'un jeu de fléchettes est constituée d'une zone jaune et d'une zone verte. Lorsque la cible est atteinte par un joueur, la probabilité d'atteindre la zone verte est de $1/2$. Le joueur A atteint toujours la cible et le joueur B atteint la cible avec la probabilité $p \in [0,1]$.

1. On note X le nombre de lancers nécessaires pour que le joueur A atteigne la zone verte. Donner la loi de la variable aléatoire X, son espérance et sa variance.
2. Calculer la probabilité que le joueur B atteigne la zone verte.
3. Le gagnant est celui qui atteint la zone verte en premier. Le joueur A commence en premier.
   (a) Calculer la probabilité que le joueur A gagne le jeu.
   (b) Le jeu se finit-il presque surement?

Cours. Rappeler la formule de Taylor-Young pour une fonction d'une variable réelle. Rappeler la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 pour une fonction de deux variables.

Planche 24 — **Mathématiques I - Année 2016**

Exercice. Une urne contient une boule blanche et une boule rouge. On effectue une succession de tirages de la façon suivante : on tire au hasard une boule, puis on la remet dans l'urne accompagnée de $c \in \mathbb{N}^*$ boules de la même couleur. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note X_n la variable aléatoire qui prend la valeur 1 si on tire une boule blanche au n-ième tirage et 0 sinon.

1. Déterminer la loi et l'espérance de X_1. Que représente $Z_p = \sum_{i=1}^{p} X_i$ où $p \in \mathbb{N}^*$?
2. Soit $(p,k) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$. Déterminer $P(X_{p+1} = 1 \mid Z_p = k)$ et en déduire que $P(X_{p+1} = 1) = \dfrac{1 + c\,\mathrm{E}(Z_p)}{2 + pc}$.
3. Déterminer la loi de X_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Cours. Rappeler la formule de Taylor-Young à l'ordre 2 pour une fonction de deux variables. Rappeler la formule de Taylor avec reste intégral pour une fonction d'une variable.

Planche 25 — **Mathématiques I - Année 2016**

Exercice. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction $f_n : x \mapsto \ln(1 + 3x + x^n)$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer qu'il existe un unique $a_n \in \mathbb{R}_+$ tel que $f_n(a_n) = 1$. Montrer que $0 \leqslant a_n \leqslant 1$.
2. Calculer a_0, a_1 et a_2.
3. Soient $n \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}_+$. Déterminer le signe de $f_{n+1}(x) - f_n(x)$.
4. Étudier la convergence de $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et déterminer sa limite si elle existe.

Cours. Rappeler la définition de la loi géométrique. Si X et Y sont deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi géométrique de paramètre p, calculer $P(X = Y)$.

Planche 26 — **Mathématiques I - Année 2016**

Exercice. On considère la courbe paramétrée $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définie par $f : t \mapsto (-2t^{-2}, t^{-3})$.

1. Étudier et tracer la courbe paramétrée f.
2. Déterminer les équations de la tangente et de la normale à la courbe au point de paramètre t.
3. Montrer qu'il existe exactement deux droites qui sont à la fois tangentes et normales à la courbe.

Cours. Rappeler la définition de la loi géométrique. Rappeler son espérance et sa variance. Rappeler la définition et la convergence d'une série de Riemann.

Partie III Mathématiques et Algorithmique

Modalités de l'épreuve : L'épreuve dure 1 heure (30 minutes de préparation et 30 minutes d'interrogation, réparties tout le long de l'épreuve).

Cette épreuve orale vise à évaluer les compétences des candidats sur les programmes de mathématiques et d'informatique de la filière PTSI/PT.

L'épreuve consistera en deux exercices de durées voisines :

- l'un se déroulera au tableau et portera sur le programme de mathématiques des deux années de classe préparatoire ;
- l'autre exercice se déroulera sur un ordinateur et portera sur une partie du programme d'informatique.

Pendant chaque exercice, alterneront des phases de réflexion et d'écriture du candidat et des phases d'interaction avec l'examinateur.

Les outils informatiques mis à disposition du candidat seront Python 3 et ses bibliothèques (dont numpy, scipy, matplotlib). Le programme de cette épreuve se limite aux items suivants.

- Tout le programme de première année d'informatique.
- Dictionnaires et programmation dynamique.
- Outils numériques et mathématiques de base, mentionnés en annexe des programmes de physique-chimie de la filière PTSI/PT :
  - ▶ calcul approché d'une intégrale sur un segment ;
  - ▶ calcul approché du nombre dérivé d'une fonction en un point ;
  - ▶ méthode d'Euler explicite ;
  - ▶ etc...

En particulier, les items suivants ne sont pas au programme de l'oral.

- Bases de données.
- Algorithmes pour l'I.A.
- Théorie des jeux.

III.A - Planches de mathématiques

Planche 27 — **Mathématiques II - Année 2023**

On définit l'application φ sur $\mathbb{C}_3[X]$ par $\varphi : P \mapsto X(X+1)P(1) + X(X-1)P(-1)$.

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{C}_3[X]$.
2. Montrer que $\big(X(X-1), X(X+1)\big)$ est une base de $\mathrm{Im}(\varphi)$, puis déterminer une base de $\mathrm{Ker}(\varphi)$.
3. Montrer que $\mathrm{Im}(\varphi)$ et $\mathrm{Ker}(\varphi)$ sont supplémentaires.
4. L'endomorphisme φ est-il bijectif ? diagonalisable ?

Planche 28 — **Mathématiques II - Année 2023**

Pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$, on note $M(a,b) = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 1 & b \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$.

1. Pour quelles valeurs de $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ la matrice $M(a,b)$ est inversible ?
2. Soit $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ tel que $M(a,b)$ n'est pas inversible. Calculer $M(a,b)^n$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
3. Soient X et Y deux variables aléatoires indépendantes suivant une loi géométrique de paramètre p. Calculer la probabilité que $M(X,Y)$ soit inversible.

Planche 29 — **Mathématiques II - Année 2023**

On considère 4 points A_0, B_0, C_0 et D_0 dans le plan. On définit quatre suites de points du plan par récurrence : pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note A_{n+1} le milieu de $[A_nB_n]$, B_{n+1} le milieu de $[B_nC_n]$, C_{n+1} le milieu de $[C_nD_n]$, D_{n+1} le milieu de $[D_nA_n]$ et a_n, b_n, c_n et d_n les affixes respectives des points A_n, B_n, C_n et D_n.

1. Déterminer la figure que forment les points A_1, B_1, C_1 et D_1.
2. Déterminer une matrice $M \in \mathscr{M}_4(\mathbb{C})$ telle que
$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{pmatrix} a_{n+1} & b_{n+1} & c_{n+1} & d_{n+1} \end{pmatrix}^\top = \frac{1}{2}(\mathrm{Id}_4 + M) \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n & d_n \end{pmatrix}^\top.$$
3. Déterminer une matrice $P \in \mathrm{GL}_4(\mathbb{C})$ telle que $P^{-1}MP$ soit diagonale.
4. Montrer que (a_n), (b_n), (c_n) et (d_n) sont convergentes. Interpréter géométriquement cette limite.

Planche 30 — **Mathématiques II - Année 2023**

On suppose qu'il existe $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on ait $a_n = \cos(2^n x) > \cos(2^n y) = b_n$.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Exprimer a_{n+1} et b_{n+1} en fonction de a_n et b_n. Calculer $a_{n+1} - b_{n+1}$ et montrer que $a_n > |b_n|$.
2. Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante.
3. Montrer que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.
4. Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $x = 2k\pi$.

Planche 31 — **Mathématiques II - Année 2022**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^{+\infty} \sin^{2n}(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que l'intégrale I_n est convergente pour tout $n \in \mathbb{N}$. Calculer I_0.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer une relation de récurrence entre I_{n+1} et I_n.
3. En déduire une expression de I_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est convergente et déterminer sa limite. On pourra utiliser librement l'équivalent $n! \underset{n\to+\infty}{\sim} \sqrt{2\pi n}\left(\dfrac{n}{\mathrm{e}}\right)^n$.

Planche 32 — **Mathématiques II - Année 2022**

On considère un entier $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$ et la matrice
$$A_n = \begin{pmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 1 \\ 1 & \cdots & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}).$$

1. Exprimer A_n^2 en fonction de A_n et de I_n.
2. En déduire que la matrice A_n est inversible.
3. Soit $p \in \mathbb{N}$. Calculer le reste dans la division euclidienne de X^p par $X^2 - (n+2)X + (n+1)$.
4. En déduire A_n^p pour tout $p \in \mathbb{Z}$.

Planche 33 — **Mathématiques II - Année 2022**

On note E l'ensemble des fonctions $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$, bornées et vérifiant $f(0) = 0$.

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$.
2. Soit $f \in E$. Montrer que la fonction $x \mapsto \dfrac{f(x)}{x}$ est prolongeable par continuité en 0.
3. Montrer que l'application $\varphi : (f, g) \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f(x)g(x)}{x^2}\,\mathrm{d}x$ est une produit scalaire sur E.
4. Montrer que pour tout $(f, g) \in E^2$, on a $\varphi(f, g) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{f'(x)g(x) + f(x)g'(x)}{x}\,\mathrm{d}x$.
5. Calculer le projeté orthogonal de la fonction sin sur la droite $F = \mathrm{Vect}\left(x \mapsto x^2\mathrm{e}^{-x}\right)$.

Planche 34 — **Mathématiques II - Année 2022**

On considère les fonctions d'une variable réelle définies par

$$f : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n^2} \quad \text{et} \quad h : x \mapsto \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(1-x)^n}{n^2} + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}\left(\frac{x-1}{x}\right)^n.$$

1. (a) Déterminer le rayon de convergence R de la série entière dont f est la somme.
   (b) En déduire l'ensemble de définition de la fonction f.
   (c) Pour tout $x \in]-R, R[$, exprimer $xf'(x)$ avec des fonctions usuelles.
2. (a) Déterminer l'ensemble de définition I de h.
   (b) Montrer que h est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur l'intérieur de I.
   (c) Exprimer h avec les fonctions usuelles.

Planche 35 — **Mathématiques II - Année 2022**

On considère un entier $n \in \mathbb{N}$ et on définit le polynôme $L_n = \dfrac{n!}{(2n)!}\left[(X^2-1)^n\right]^{(n)} \in \mathbb{R}[X]$.

1. Montrer que L_n est un polynôme unitaire de degré n.
2. Montrer que pour tout $Q \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$, on a $\displaystyle\int_{-1}^{1} L_n(t)Q(t)\,\mathrm{d}t = 0$.
3. Montrer que L_n a n racines simples comprises dans l'intervalle $]-1, 1[$.

Planche 36 — **Mathématiques II - Année 2022**

On considère sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$xy' + 2y = \frac{x}{1+x^2}. \qquad (E)$$

1. Déterminer les solutions de (E) sur les intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.
2. Donner les solutions de (E) sur $\mathbb{R}^*$.
3. Étudier l'existence de solution sur $\mathbb{R}$.

Planche 37 — **Mathématiques II - Année 2022**

Soit $n \in \mathbb{N}$. On définit l'application φ sur $\mathbb{C}_n[X]$ par $\varphi : P \mapsto P + (1-X)P'$.

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{C}_n[X]$.
2. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de φ.
3. L'endomorphisme φ est-il bijectif? diagonalisable?

Planche 38 — **Mathématiques II - Année 2022**

On considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et des nombres deux à deux distincts $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{R}$.

1. Déterminer les polynômes $P \in \mathbb{R}_2[X]$ tels que $P(x_1) = P(x_2) = 0$ et $P(x_3) = 1$.
2. Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, on considère $P_i \in \mathbb{R}_{n-1}[X]$ par $P_i(x_j) = 0$ pour tout $j \in [\![1, n]\!]$ avec $j \neq i$ et $P_i(x_i) = 1$.
   (a) Pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, déterminer une expression de P_i.
   (b) Montrer que la famille $(P_1, \dots, P_n)$ est une base de $\mathbb{R}_{n-1}[X]$.
   (c) Déterminer le polynôme $P_1 + \cdots + P_n$.

Planche 39 — **Mathématiques II - Année 2022**

On considère la fonction d'une variable réelle définie par $f : x \mapsto \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \cos(xt)\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ est convergente. Dans la suite, on admet que $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \sqrt{\pi}$.
2. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
4. Montrer que $2f'(x) + xf(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, puis en déduire une expression de f.

Planche 40 — **Mathématiques II - Année 2022**

Soit $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$. On pose $f_0 : x \mapsto x$ et on définit pour tout $n \in \mathbb{N}$ la fonction $f_{n+1} : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f_{n+1}(x) = \frac{1}{\alpha + f_n(x)}.$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Étudier les variations de la fonction f_n.
2. Montrer que les courbes des fonctions f_n pour $n \in \mathbb{N}$ passent par un même point que l'on déterminera.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe $(\alpha_n, \beta_n, \gamma_n, \delta_n) \in \mathbb{R}^4$ telles que $f_n(x) = \dfrac{\alpha_n x + \beta_n}{\gamma_n x + \delta_n}$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.
4. Déterminer une matrice $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telle que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{pmatrix} \alpha_{n+1} & \beta_{n+1} \\ \gamma_{n+1} & \delta_{n+1} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} \alpha_n & \beta_n \\ \gamma_n & \delta_n \end{pmatrix}.$$

5. En déduire une expression de α_n, β_n, γ_n et δ_n pour tout $n \in \mathbb{N}$, puis la limite de $f_n(x)$ lorsque $n \to +\infty$.

Planche 41 — **Mathématiques II - Année 2022**

On souhaite déterminer les fonctions continues $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_0^x \cos(x-t) f(t)\,\mathrm{d}t. \qquad (E)$$

1. Résoudre l'équation différentielle $y'' - 2y' + y = 1$.
2. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue vérifiant (E).
   (a) Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$, puis calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
   (b) Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}$, puis calculer $f''(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3. En déduire toutes les fonctions continues vérifiant l'équation (E).

Planche 42 — **Mathématiques II - Année 2022**

On considère la fonction d'une variable réelle définie par $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x\mathrm{e}^{-xt}}{1+t}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}_+$.
2. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}_+$. On pourra utiliser le changement de variable $u = xt$.
3. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$, puis déterminer une équation différentielle vérifiée par f.

Planche 43 — **Mathématiques II - Année 2022**

Un pêcheur dispose d'une pièce donnant « face » avec probabilité $p \in]0,1[$. Il lance la pièce jusqu'à obtenir pour la première fois « face ». On note X le nombre de lancers effectués.

1. Donner la loi de X, son espérance et sa variance.
2. Calculer $P(X > 1)$.

Dans un second temps, si le pêcheur a lancé k fois la pièce, alors il se rend en mer pendant k heures : on note Y le nombre de poissons pêchés et on suppose que Y suit une loi de Poisson de paramètre k.

3. Déterminer la loi de (X, Y), puis en déduire la loi de Y.

On admet que si $(u_{(i,j)})_{(i,j)\in\mathbb{N}^2}$ est une suite de réels positifs, alors on a l'égalité $\displaystyle\sum_{i=0}^{+\infty}\sum_{j=0}^{+\infty} u_{i,j} = \sum_{j=0}^{+\infty}\sum_{i=0}^{+\infty} u_{i,j}$.

4. Calculer l'espérance de Y.

Planche 44 — **Mathématiques II - Année 2021**

On considère la matrice $J \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ dont tous les coefficients sont égales à 1 et la matrice $A = (\mathrm{I}_3 + J)/4$. On considère également trois suites $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ vérifiant

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{pmatrix} x_{n+1} & y_{n+1} & z_{n+1} \end{pmatrix}^\top = A \begin{pmatrix} x_n & y_n & z_n \end{pmatrix}^\top.$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer J^n, puis A^n.
2. Déterminer une expression générale de $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$, puis préciser leur limite.

Planche 45 — **Mathématiques II - Année 2021**

Soit $t \in \mathbb{R}$. On note P_t le polynôme caractéristique de la matrice

$$M_t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & t \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}).$$

1. Déterminer une expression de P_t.
2. Montrer que P_t admet trois racines réelles α_t, β_t et γ_t telles que $\alpha_t < 0 < \beta_t < 2 < \gamma_t$.
3. Déterminer α_1, β_1 et γ_1 ainsi que les sous-espaces propres associés.

Planche 46 — **Mathématiques II - Année 2021**

Une personne monte un escalier : elle monte soit une marche avec probabilité $p \in]0,1[$ soit deux marches avec probabilité $1-p$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on note X_n le nombre de marches montées lors du n-ième déplacement et S_n le nombre total de marches montées à l'issue de la n-ième étape. On définit

$$\forall n \in \mathbb{N}^*, \quad Y_n = \min\{k \in \mathbb{N} \mid S_k \geqslant n\}.$$

1. Calculer l'espérance de X_1, puis de S_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
2. Déterminer la loi et l'espérance des variables aléatoires Y_1 et Y_2.
3. Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}$, on a $P(Y_{n+1} = k) = pP(Y_n = k-1) + (1-p)P(Y_{n-1} = k-2)$.

Planche 47 — **Mathématiques II - Année 2021**

On considère l'ensemble $E = \{aI_3 + bJ \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \mid (a,b) \in \mathbb{R}^3\}$ où la matrice J est définie par

$$J = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 2 \\ -2 & 4 & 2 \\ 2 & -3 & -1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}).$$

1. Calculer J^2, puis J^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{M}_3(\mathbb{R})$. Donner en une base et préciser sa dimension.
3. Soit $M = aI_3 + bJ \in E$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Étudier l'inversibilité de M en fonction de (a,b).
4. Soit $M = aI_3 + bJ \in E$ avec $(a,b) \in \mathbb{R}^2$. Calculer M^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Planche 48 — **Mathématiques II - Année 2021**

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On rappelle qu'une matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est nilpotente s'il existe $p \in \mathbb{N}$ tel que $M^p = 0$. On considère une matrice nilpotente $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ telle que $M^\top M = MM^\top$.

1. Montrer que la matrice $A = MM^\top$ est symétrique et nilpotente.
2. En déduire que la matrice A est diagonalisable, puis que $A = 0$.
3. En considérant la trace de la matrice A, conclure que $M = 0$.

Planche 49 — **Mathématiques II - Année 2019**

Soit $n \in \mathbb{N}$. On définit ϕ sur $\mathbb{R}_n[X]$ par $\phi(P)(x) = \displaystyle\int_x^{x+1} P(t)\,\mathrm{d}t$ pour tout $(P,x) \in \mathbb{R}_n[X] \times \mathbb{R}$.

1. Calculer $\phi(X^k)$ pour tout $k \in [\![0,n]\!]$. En déduire que ϕ est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Donner la matrice de ϕ dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
3. L'endomorphisme ϕ est-il bijectif? diagonalisable?
4. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$. Comparer $\phi(P')$ et $\phi(P)'$.

Planche 50 — **Mathématiques II - Année 2019**

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_0^{\cos^2(x)} \mathrm{Arccos}(\sqrt{t})\,\mathrm{d}t + \int_0^{\sin^2(x)} \mathrm{Arcsin}(\sqrt{t})\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que pour tout $t \in [0,1]$, on a $\mathrm{Arccos}(t) + \mathrm{Arcsin}(t) = \dfrac{\pi}{2}$.
2. Montrer que f est $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ et qu'elle est π-périodique.
3. Montrer que f est constante et déterminer sa valeur.

Planche 51 — **Mathématiques II - Année 2019**

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 3$. Calculer le déterminant de taille $n \times n$ suivant

$$D_n = \begin{vmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & n-1 \\ 0 & 1 & \ddots & \vdots & n-2 \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 1 & 1 \\ n-1 & n-2 & \cdots & 1 & 1 \end{vmatrix}.$$

Planche 52 — **Mathématiques II - Année 2019**

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit la fonction d'une variable réelle $f_n : x \mapsto \dfrac{\sin(nx)}{\sin(x)}$. On considère également

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad I_n = \int_0^{\pi} f_n(x)\,\mathrm{d}x.$$

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Étudier la continuité, la dérivabilité, la parité et la périodicité de f_n.
2. Calculer I_1 et I_2. Calculer $I_{n+2} - I_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et en déduire la valeur de I_n.
3. Étudier la convergence de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Planche 53 — **Mathématiques II - Année 2019**

On considère la surface $\mathscr{S}$ d'équation $(x-2)^2+y^2+z^2=1$.

1. Donner la nature géométrique de $\mathscr{S}$.
2. Déterminer les nombres $\lambda \in \mathbb{R}$ tels qu'il existe une droite horizontale $\mathscr{D}_\lambda$ passant par le point A_λ de coordonnées $(0,0,\lambda)$ et coupant une seule fois la surface $\mathscr{S}$.
3. Donner une équation cartésienne de la réunion des droites $\mathscr{D}_\lambda$ précédentes.

Planche 54 — **Mathématiques II - Année 2019**

On considère la surface $\mathscr{S}$ d'équation $2x^2-3yz+4z-1=0$.

1. Déterminer les points réguliers de la surface $\mathscr{S}$.
2. Déterminer une équation du plan tangent à $\mathscr{S}$ en un point régulier $(a,b,c) \in \mathscr{S}$.
3. Déterminer les plans tangents à $\mathscr{S}$ contenant la droite d'équation $y-2=x-z=0$.

Planche 55 — **Mathématiques II - Année 2018**

On considère l'intégrale $I=\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x-\operatorname{Arctan}(x)}{x(1+x^2)\operatorname{Arctan}(x)}\,\mathrm{d}x$.

1. Montrer que l'intégrale I est convergente.
2. Déterminer $(a,b,c) \in \mathbb{R}^3$ de sorte que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on ait $\dfrac{1}{x(1+x^2)}=\dfrac{a}{x}+\dfrac{bx+c}{1+x^2}$.
3. Calculer la valeur de l'intégrale I.

Planche 56 — **Mathématiques II - Année 2018**

On considère l'intégrale $I=\displaystyle\int_0^1 \frac{1-\sqrt{t}}{1-\sqrt[3]{t}}\,\mathrm{d}t$.

1. Effectuer la division euclidienne de X^8-X^5 par X^2-1.
2. Montrer que l'intégrale I est convergente et calculer sa valeur.

Planche 57 — **Mathématiques II - Année 2018**

Exercice. Soit A et N deux points sur un cercle Γ du plan. On note H le projeté de A sur la tangente à Γ en un point M.

1. Paramétrer le problème et calculer les coordonnées de H.
2. Déterminer l'aire maximale du triangle MHN.

Exercice. On considère l'espace vectoriel $E=\{f \in \mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R}) \mid f(0)=f(1)=0\}$ et on définit Θ et Φ sur E^2 par

$$\Theta : (f,g) \mapsto \int_0^1 f'(t)g'(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \Phi : (f,g) \mapsto \int_0^1 \big(f(t)g(t)+f'(t)g'(t)\big)\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrez que Θ et Φ sont des produits scalaires sur E.
2. Déterminer $m, M \in \mathbb{R}_+^*$ tels que $m\Phi(f,f) \leqslant \Theta(f,f) \leqslant M\Phi(f,f)$ pour tout $f \in E$.

Planche 58 — Mathématiques II - Année 2018

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On considère $A = (a_{ij}) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{C})$ vérifiant pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ l'inégalité $|a_{ii}| > \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|$.

1. Les matrices $U = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2+\mathrm{i} & 1 \\ 1 & 0 & 1+\mathrm{i} \end{pmatrix}$ et $V = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ vérifient-elles la condition ci-dessus ?
2. On suppose que $n = 2$. Montrer que A est inversible.
3. On considère $Z = \begin{pmatrix} z_1 & \cdots & z_n \end{pmatrix}^\top \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{C})$ telle que $AZ = 0$ et on note $M = \max_{1\leqslant i\leqslant n} |z_i|$. Montrer que
$$\forall i \in [\![1, n]\!], \quad |a_{ii}||z_i| \leqslant M \sum_{\substack{j=1 \\ j\neq i}}^{n} |a_{ij}|.$$
4. Conclure que la matrice A est inversible.

Planche 59 — Mathématiques II - Année 2018

On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f : x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2}$.

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un polynôme $P_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que $f^{(n)}(x) = P_n(x)\mathrm{e}^{-x^2}$. Préciser le degré, le coefficient dominant et la parité de P_n.
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En utilisant que f est solution de $y' + 2xy = 0$, trouver une relation entre P_{n+1}, P_n et P_{n-1}.
3. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. En déduire que $P_n' + 2nP_{n-1} = 0$, puis que P_n vérifie une équation différentielle.
4. Soit $n \in \mathbb{N}$. Résoudre cette équation différentielle et en déduire une expression de P_n.

Planche 60 — Mathématiques II - Année 2018

Exercice. Pour tout $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$, on définit les matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 2 & 1 & -2 \\ 3 & -1 & -2 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad T(\lambda, \mu) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 & 0 \\ 0 & \mu & 1 \\ 0 & 0 & \mu \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}).$$

1. Montrer qu'il existe $(\lambda, \mu) \in \mathbb{R}^2$ tel que A soit semblable à une matrice de la forme $T(\lambda, \mu)$.
2. Calculer A^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice. On considère la fonction d'une variable réelle $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^x \sqrt{\frac{1-t^2}{x^2-t^2}}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que la fonction f est définie sur $[-1, 1]$.
2. Déterminer la limite en 0 de la fonction f.

Planche 61 — **Mathématiques II - Année 2017**

Soit $a > 0$. On considère la courbe $\mathscr{C}$ définie par les conditions $x > 0$ et $x^2 - y^2 = a^2$.

1. Déterminer un paramétrage de la courbe $\mathscr{C}$.
2. Déterminer un paramétrage de la normale en tout point M de la courbe $\mathscr{C}$.
3. On note $\mathscr{C}_M$ le cercle tangent à la courbe en M et centré sur l'axe (Oy). Donner une équation de $\mathscr{C}_M$.
4. Montrer que les tangentes à $\mathscr{C}_M$ passant par le point A de coordonnées $(a\sqrt{2}, 0)$ sont orthogonales.

Planche 62 — **Mathématiques II - Année 2017**

Coralie se lève tous les matins pour aller au lycée avec une probabilité 1/3 d'être en retard. Lorsque c'est le cas, elle prend toujours le bus, sinon elle s'y rend à pied avec une probabilité de 2/5. On désigne par B l'évènement « Coralie prend le bus » et par R l'évènement « Coralie est en retard ».

1. Calculer $P(B)$ et $P_B(R)$.

On observe ces faits pendant 180 jours et on note X la variable aléatoire qui compte le nombre de fois où Coralie prend le bus.

2. Reconnaitre la loi de X. Calculer son espérance et sa variance.
3. Combien de fois, en moyenne, est-elle allée au lycée à pied ?

Planche 63 — **Mathématiques II - Année 2017**

On considère la courbe $\mathscr{C}$ paramétrée par $x : t \mapsto 2t^2$ et $y : t \mapsto 2t$.

1. Représenter la courbe $\mathscr{C}$.
2. Déterminer une équation de la tangente T_t au point de paramètre t.
3. Déterminer les conditions sur $(t, u) \in \mathbb{R}^2$ pour que T_t et T_u soient perpendiculaires.
4. Déterminer l'ensemble des points par lesquels passent deux tangentes à $\mathscr{C}$ orthogonales entre elles.

Planche 64 — **Mathématiques II - Année 2017**

Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère l'application f définie sur $\mathbb{R}_n[X]$ par $f : P \mapsto (3 - X)P'(X) - P(X) + X^2P''(X)$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Déterminer la matrice de f dans la base canonique de $\mathbb{R}_n[X]$.
3. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?
4. L'application f est-elle bijective ?

Planche 65 — **Mathématiques II - Année 2017**

Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier impair. Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant la relation $(X^n + 1)P(X) = P(X^2)$ que l'on note (E).

1. Montrer que le polynôme $X^n - 1$ vérifie la relation (E).
2. Déterminer le degré du polynôme P
3. Soit ω une racine n-ième du nombre -1. Montrer que $-\omega$ est racine de P.
4. Déterminer tous les polynôme vérifiant la relation (E).

Planche 66 — **Mathématiques II - Année 2017**

On définie la fonction d'une variable réelle $h : a \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{1+(na)^2}$.

1. Montrer que h est définie sur $\mathbb{R}^*$.
2. Étudier les variations de la fonction h, puis sa limite en $+\infty$.
3. Soit $a \in \mathbb{R}^*$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a l'encadrement
$$\frac{1}{1+((n+1)a)^2} \leqslant \int_n^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{1+(ta)^2} \leqslant \frac{1}{1+(na)^2}.$$
4. En déduire un équivalent de h en 0.

Planche 67 — **Mathématiques II - Année 2016**

Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on considère l'intégrale $I_n = \int_\pi^{2\pi} \frac{x}{\operatorname{Arctan}(nx)} \mathrm{d}x$.

1. Montrer que pour tout $x > 0$, on a $\operatorname{Arctan}(x) + \operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{x}\right) = \frac{\pi}{2}$.
2. En déduire la limite en $+\infty$ de la fonction $f : x \mapsto \frac{x}{\operatorname{Arctan}(x)} - \frac{2}{\pi}x$.
3. Déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Planche 68 — **Mathématiques II - Année 2016**

Un mobile se déplace aléatoirement sur les sommets A, B et C d'un triangle en partant de la position A à l'instant $n = 0$. Ensuite à l'étape n, s'il est en A ou en C, il sera en B à l'étape $n+1$; s'il est en B, il a une probabilité $1/4$ d'aller en A et une probabilité $1/2$ de rester sur place. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note a_n, b_n et c_n les probabilités respectives que le mobile soit en A, B ou C à l'étape n; on note également $T_n = \begin{pmatrix} a_n & b_n & c_n \end{pmatrix}^\top$.

1. Montrer qu'il existe une matrice $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ telle que $T_{n+1} = MT_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Calculer une expression de M^n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. En déduire une expression explicite des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$, puis leur limite respective.

Planche 69 — **Mathématiques II - Année 2016**

Exercice. Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. Étudier la convergence de la série $\sum_{n\geqslant 1} \left(n \sin\left(\frac{1}{n}\right)\right)^{n^\alpha}$.

Exercice. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère l'intégrale $I_n = \int_0^1 \frac{t^n}{t+10} \mathrm{d}t$.

1. Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge et déterminer sa limite.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer une relation entre I_n et I_{n+1}.
3. Déterminer la monotonie de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$, puis un équivalent de I_n lorsque n tend vers $+\infty$.

III.B - Informatique - Planches à dominante algorithmique

Planche 70 — **Algorithmique - Année 2023**

On considère la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $z_0 = d \in \mathbb{C}$ et $z_{n+1} = \dfrac{z_n + |z_n|}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Écrire une fonction `f` de sorte que $z_{n+1} = f(z_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Donner les 12 premiers termes de la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $d = \mathrm{i}$.
2. Écrire une fonction `traj1` d'arguments un nombre complexe `d` et un entier naturel `N` qui renvoie la liste des `N+1` premiers termes de la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $z_0 = d$. Tester votre fonction avec `traj1(i,8)`.
3. Écrire une fonction `traj2` d'argument un nombre complexe `d` qui renvoie la liste des premiers termes de la suite $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec $z_0 = d$ vérifiant $\mathrm{Im}(z) > 0.01$. Tester votre fonction avec `traj2(i)`.
4. Tracer les points de `traj2(i)` sur un graphique.
5. Sur le même graphique, tracer `traj2(d)` où $d = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\alpha}$ avec $\dfrac{\pi}{90} \leqslant \alpha \leqslant \dfrac{179\pi}{90}$ par pas de $\dfrac{\pi}{90}$.

Planche 71 — **Algorithmique - Année 2023**

On possède 4 jeux de 52 cartes composés pour chaque symbole : des cartes nombres de valant de 2 à 10 points, des figures (un valet, une reine et un roi) valant 10 points et un As valant 11 points. Dans tout l'exercice on ignore les couleurs, motifs et natures des cartes.

1. Représenter ce jeu de 208 cartes avec une liste. Écrire une fonction `melanger` sans argument qui renvoie ce jeu de cartes mélangé. On pourra utiliser la fonction `shuffle` du module `numpy.random`. Tester cette fonction en affichant la longueur de la liste mélangée, les 8 premiers éléments et les 6 derniers éléments.
2. Écrire une fonction tirer d'argument une liste L de cartes, qui renvoie le premier élément de cette liste et la liste L sans son premier élément. Si la liste L est vide, alors la fonction retourne le jeu de 208 cartes mélangé. Exécuter `tirer([10,3,7,10,8])` retourne alors `(10, [3,7,10,8])`.

On se place à présent dans un jeu où le joueur doit, par addition des valeurs de ses cartes, ne pas dépasser 21 de score.

3. Écrire une fonction jouer d'arguments une liste L de cartes et un nombre `s` appelé « seuil », qui renvoie une liste vide et une liste contenant les cartes non tirées si le joueur a perdu (atteint plus que 21), ou qui renvoie la valeur des cartes tirées si le joueur ne perd pas (atteint 21 ou moins). Le jeu s'arrête lorsque le joueur a atteint au moins son seuil.
4. On veut déterminer la meilleure valeur du seuil pour gagner le plus de fois possible. Deux joueurs s'affrontent alors avec des seuils différents. Écrire une fonction `bidule` d'arguments `s1` le seuil du joueur 1, `s2` le seuil du joueur 2 et `N` le nombre de parties jouées, qui renvoie la fréquence de victoire, défaite et score nul (les deux au même score) de chacun des joueurs. Dans le cas où il y a égalité à 21 points, c'est le joueur qui l'a réalisé avec le moins de cartes qui gagne la partie. Tester cette fonction pour des valeurs de seuil du joueur 1 variant entre 12 et 20, et pour des valeurs de seuil du joueur 2 étant `s1+1`.

Planche 72 — Algorithmique - Année 2022

1. Que fait la fonction `Lch` suivante ?

```
def Lch(n):
    return [int(i) for i in str(n)]
```

2. Écrire une fonction `f` d'argument un nombre n et renvoyant la somme de « la somme des chiffres composants n » et du « produit des chiffres composants n ».
3. Déterminer les entiers n vérifiant $1 \leqslant n \leqslant 1000$ tel que $f(n) = n$.
4. On fixe $n \in \mathbb{N}^*$ et on définit la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ par $u_0 = n$ et la relation $u_{k+1} = f(u_k)$ pour tout $k \in \mathbb{N}$. Écrire une fonction `suite(n,N)` qui affiche les N premiers termes de la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Que constate-t-on ?
5. Déterminer les entiers $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $n < f(n)$. En déduire une justification du constat établi dans la question précédente.
6. Écrire une fonction `decompose(n)` qui donne la longueur de la liste contenant les termes non cycliques de la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$ et la longueur de la plus courte période d'un cycle de la suite $(u_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

Planche 73 — Algorithmique - Année 2022

Toutes les matrices de cet exercice doivent être représenter par des tableaux `numpy`.

1. Que fait la fonction `p` suivante ?

```
def p(A,B):# A et B sont des matrices carrées de même taille
    return numpy.dot(A,B)
```

2. Écrire une fonction `identite` d'argument un nombre n et renvoyant matrice identité de taille n.
3. Écrire une fonction `trace` d'argument une matrice carrée A et renvoyant la trace de A.
4. Écrire une fonction `pow1` d'arguments une matrice carrée A et un entier p et qui renvoie la matrice A^p.
5. En utilisant les relations $A^p = \left(A^{p/2}\right)^2$ si p est pair et $A^p = A\left(A^{(p-1)/2}\right)^2$ si p est impair, écrire une fonction récursive `pow2` d'arguments une matrice carrée A et un entier p et qui renvoie la matrice A^p.
6. Comparer l'efficacité des fonctions `pow1` et `pow2`.

Planche 74 — Algorithmique - Année 2021

1. Créer une fonction `parcours` d'argument une liste $L = [a_1, a_2, \ldots, a_n]$ qui modifie cette liste en permutant a_k et a_{k+1} si $a_{k+1} < a_k$, pour k variant de 1 à $n-1$, et qui renvoie le nombre de permutations effectuées. Par exemple, si $L = [5,4,1,6]$, alors `parcours(L)` renvoie 2 et la liste L devient $L = [4,1,5,6]$.
2. Que peut-on dire du dernier élément d'une liste à laquelle on a appliqué la fonction `parcours` ?
3. On veut utiliser cette fonction pour trier par ordre croissant une liste selon le principe suivant : pour une liste `L` donnée en entrée on répète l'application de la fonction `parcours` jusqu'à ce que `L` devienne invariante par cette fonction. Écrire une fonction `tri1` qui ordonne une liste donnée en entrée selon ce principe et qui renvoie le nombre d'itérations effectuées.
4. Expliquer pourquoi la fonction `tri1` donne bien le résultat voulu en une durée finie. Évaluer son coût de calcul dans le meilleur des cas et dans le pire des cas.
5. Écrire une fonction `tri2` améliorant la fonction `tri1` en évitant les comparaisons inutiles.

Planche 75 — Algorithmique - Année 2021

Dans une liste ou une chaîne de caractères, on appelle « composante » une sous-liste ou sous-chaîne correspondant à la répétition d'un même élément ou caractère, précédée et suivie par rien ou un autre élément ou caractère. Les composantes de `[1,1,0,0,1,1,1,0,1,1,1]` sont `[1,1]` suivie de `[0,0]`, `[1,1,1]`, `[0]`, et `[1,1,1]` ; celles de `'aaaaggaadaaa'`, `'aaaa'` suivie de, `'gg'`, `'aa'`, `'d'` et `'aaa'`. Une composante peut ensuite se coder sous la forme d'un couple `[n,c]`, où `n` désigne le nombre de répétitions de l'élément ou du caractère `c`.

1. Écrire une fonction `coupures` dont l'argument est une liste ou une chaîne de caractères `S`, qui renvoie la liste des indices `i` tels que `S[i]` $\neq$ `S[i-1]`, à la fin de laquelle on rajoute la longueur de `S`. Par exemple, l'instruction `coupures([1,1,0,0,1,1,1,0,1,1,1])` renvoie `[2,4,7,8,11]` tandis que l'instruction `coupures('aaaaggaadaaa')` renvoie `[4,6,8,9,12]`.
2. Écrire une fonction `CP` de même argument `S` qui renvoie une liste résultant de la mise bout-à-bout des couples codant les composantes de `S`. Par exemple, l'instruction `CP([1,1,0,0,1,1,1,0,1,1,1])` renvoie `[2,1,2,0,3,1,1,0,3,1]` et `CP('aaaaggaadaaa')` renvoie `[4,'a',2,'g',2,'a',1,'d',3,'a']`.
3. Écrire une fonction `nbits` dont l'argument est un entier naturel n et qui renvoie le plus petit entier a tel que $n \leqslant 2^a$.
4. Écrire une fonction `nbelem` dont l'argument est une liste ou une chaîne de caractères `S` et qui renvoie le nombre d'éléments ou de caractères distincts contenus dans `S`. Par exemple, l'exécution de l'instruction `nbelem([1,1,0,0,1,1,1,0,1,1,1])` renvoie 2 et `nbelem('aaaaggaadaaa')` renvoie 3.
5. En déduire une fonction `nbtotalbits` qui renvoie le nombre minimum de bits nécessaires pour coder `S` une fois connu l'ensemble des éléments ou caractères distincts contenus dans `S` (par exemple, dans la chaine `'aaaaggaadaaa'`, chaque lettre peut être codée sur 2 bits avec `'a':00`, `'d':01`, `'g':10`).
6. Si `S` est une liste composée de 45 zéros suivis de 76 uns, quelle solution peut-on trouver pour minimiser le stockage de `S` ?

Planche 76 — Algorithmique - Année 2021

1. Soit $k \in \mathbb{N}^*$; on note $m(k)$ le plus grand nombre qui est une puissance de 2 et qui divise l'entier k ; par exemple, $m(12) = 4$. Définir la fonction `m` en Python.
2. Soit la suite $(c_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par $c_n = \dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{n}{m(n)}\right)$.
   Montrer que les termes de cette suite sont des entiers naturels, puis écrire une fonction `c1` d'argument un entier naturel n et renvoyant l'entier c_n. Donner les valeurs de c_n pour $1 \leqslant n \leqslant 16$.
3. Quelle relation simple existe-t-il entre c_{2n} et c_n pour $n \geqslant 1$? Que vaut c_{2n+1} ? En déduire une fonction `c2` renvoyant c_n après l'avoir calculé sans utiliser la fonction m.
4. Une façon équivalente de calculer c_n consiste en :
   - écrire le nombre n en base 2 ;
   - supprimer tous les zéros consécutifs à partir de la droite ;
   - ajouter 1 au nombre binaire obtenu ;
   - supprimer le 0 de droite ainsi obtenu.

   On obtient ainsi l'écriture binaire de c_n. Après avoir vérifié à la main sur un exemple que l'algorithme fonctionne, écrire une fonction `d3` qui calcule c_n selon l'algorithme indiqué puis renvoie sa valeur. On pourra utiliser la fonction `bin` pour obtenir l'écriture binaire d'un entier. Comment prouver la validité de cet algorithme ?

Planche 77 — Algorithmique - Année 2021

1. Rappeler le théorème de la division euclienne dans $\mathbb{N}$.
2. Soient a et b deux entiers naturels avec $b \neq 0$. Pour calculer le reste et le quotient de la division euclidienne de a par b, on peut retrancher b à a tant que $a > b$. En déduire une fonction `DE1` de deux arguments a et b renvoyant le couple `(quotient,reste)` de la division euclidienne de a par b.
3. Écrire une fonction `W` de deux arguments a et b qui renvoie le plus petit nombre w supérieur ou égal à a de la forme $w = 2^k b$ où k est un entier naturel.
4. On considère le code Python suivant.

```
def DE2(a,b):
    w, q, r = W(a,b), 0, a
    while w != b:
        w //= 2
        q *= 2
        if w <= r:
            q += 1
            r -= w
    return q,r
```

   (a) Justifier que cette boucle se termine.
   (b) À chaque fin d'itération, que peut-on dire de la quantité `w q + r`?
   (c) Comment se traduisent en binaire les instructions `q*=2` et `w//=2`?
   (d) Finalement, que fait ce code?

5. Laquelle des deux fonctions `DE1` et `DE2` vous paraît la plus rapide?

Planche 78 — Algorithmique - Année 2021

1. Observer et expliquer ce que fait le code Python suivant, n désignant un entier naturel non nul :

```
def progX(n):
    if n == 1:
        res = False
    else:
        d = 2
        res = True
        while d*d <= n and res:
            res = (n%d != 0)
            d += 1
    return res
```

2. Améliorer la fonction précédente en remarquant que, pour $d \geqslant 3$, d peut progresser de 2 en 2.
3. Montrer que $2k^2 + 29$ est premier pour tout entier k vérifiant $0 \leqslant k \leqslant 27$.
4. Combien y-a-t-il de nombres premiers la forme $2k^2 + 29$, pour k vérifiant $0 \leqslant k \leqslant 100$?
5. Écrire une fonction `tester` d'argument un entier n et qui renvoie un booléen. Ce booléen vaudra `True` si et seulement si l'entier $2k^2 + n$ est premier pour tout entier k vérifiant $0 \leqslant k \leqslant n-2$.
6. Trouver tous les entiers n inférieurs à 100 vérifiant la propriété précédente.

Planche 79 — Algorithmique - Année 2021

1. Que font les fonctions `L2int` et `int2L` suivantes ?

```
def L2int(L):
    # L est une liste d'entiers naturels
    ch = ""
    for e in L:
        ch = ch + str(e)
    return int(ch)

def int2L(n):
    # n est un entier naturel
    L = []
    for car in str(n):
        L.append(int(car))
    return L
```

Soit $\varphi : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que $\varphi(n)$ est le nombre composé des chiffres décrivant le nombre n. Par exemple :

$1112 \mapsto 3112$ (trois uns, un deux) $\quad$ $29 \mapsto 1219$ (un deux, un neuf)

$333 \mapsto 33$ (trois trois) $\quad$ $1211 \mapsto 111221$ (un un, un deux, deux uns).

Soit une suite d'entiers naturels $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par : $u_0 = a$ et $u_{n+1} = \varphi(u_n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On suppose que a ne comporte pas plus de 9 chiffres identiques à la suite, de sorte que le nombre de chiffres consécutifs dans un est toujours un chiffre.

2. Écrire une fonction `lire` d'argument un nombre n et renvoyant $\varphi(n)$.
3. Afficher les dix premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ avec comme valeur initiale $a = 44440$.
4. Existe-t-il une valeur de a inférieure à 10000 telle que la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ soit constante ?
5. Définir une fonction `ecrire` d'argument k qui renvoie la valeur de n telle que $\varphi(n) = k$ si elle existe, et -1 sinon.
6. Déterminer la valeur de a telle que a ne s'écrive pas $\varphi(b)$ et que le nombre `31123113` soit un terme de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ayant comme valeur initiale a.

Planche 80 — Algorithmique - Année 2021

1. Pour tout entier naturel n, on pose $t_n = 0 + 1 + 2 + \cdots + n$. Rappeler la valeur de t_n en fonction de n. Les nombres t_n sont appelés « nombres de type $\mathscr{T}$ ». Construire la liste des nombres de type $\mathscr{T}$ inférieurs ou égaux à 100.
2. Écrire une fonction sommes de trois paramètres, deux listes `L1` et `L2` d'entiers naturels et un entier naturel n, renvoyant la liste strictement croissante des nombres inférieurs ou égaux à n qui s'écrivent comme somme d'un élément de `L1` et d'un élément de `L2`.
3. Utiliser la fonction précédente pour obtenir la liste strictement croissante des entiers compris entre 0 et 100 qui s'écrivent comme somme de trois nombres de type $\mathscr{T}$. Que constate-t-on ? Que peut-on conjecturer ?
4. Écrire une fonction `decompositions` d'argument un entier naturel n, renvoyant la liste de tous les triplets croissants de nombres de type $\mathscr{T}$ dont la somme vaut n. Chacun de ces triplets est une décomposition de n. Déterminer alors le plus petit entier naturel N ayant au moins 10 décompositions différentes.
5. Évaluer le coût de calcul de la fonction `decompositions`.

Planche 81 — **Algorithmique - Année 2021**

On considère un jeu de 32 carte formé de couples de 8 valeurs de 4 « couleurs » données par

`valeurs=["7","8","9","10","V","D","R","A"]` et `couleurs=["T","K","C","P"]`.

On distribue au hasard une « main », c'est-à-dire 5 cartes distinctes. On s'intéresse à des mains particulières :

- les « couleurs » (5 cartes de même « couleur ») ;
- les « quintes » (5 cartes de valeurs qui se suivent) ;
- les « quintes floches » (5 cartes de même « couleur » et de valeurs qui se suivent).

1. Construire l'ensemble cartes des 32 cartes à partir des deux listes valeurs et couleurs, chaque carte étant représentée par la paire `[valeur, couleur]`. Vérifier que le nombre de cartes obtenu est correct.
2. Écrire une fonction `tirerMain` sans argument qui renvoie une liste de 5 cartes distinctes tirées au hasard. On pourra utiliser la fonction `sample` du module `random`.
3. Écrire une fonction `estCouleur` d'argument une main et qui renvoie un booléen indiquant si cette main est une « couleur » ou pas.
4. Déterminer la liste quintes de toutes les suites possibles de 5 valeurs d'une quinte. En déduire une fonction `estQuinte` d'argument une main et qui renvoie un booléen indiquant si cette main est une « quinte » ou pas. [Indication : pour comparer deux listes de valeurs indépendamment de leur ordre, on pourra utiliser la fonction intrinsèque `sorted`].
5. À partir de 50000 tirages aléatoires de mains, estimer la probabilité d'obtenir une « couleur », celle de tirer une « quinte » et celle de gagner une « quinte floche ».
6. Comparer ces estimations avec les probabilités obtenues par dénombrement. On pourra utiliser la fonction `comb` du module `scipy.special`, ou faire autrement.

Planche 82 — **Algorithmique - Année 2021**

N'importe quel ensemble fini Ω d'entiers naturels peut être représenté par une liste P de booléens de la façon suivante : Ω est l'ensemble des entiers i pour lesquels `P[i]` est vrai. Par exemple, l'ensemble $\{1,4,5\}$ est représenté par la liste `[False,True,False,False,True,True,False]`.

1. Expliquer pourquoi il n'y a pas unicité de la représentation de Ω.
2. Écrire une fonction `card` d'argument une liste P de booléens qui renvoie le cardinal de l'ensemble représenté par P.
3. Écrire une fonction `EtoB` d'argument une liste L d'entiers naturels, dans le désordre et avec ou sans répétition, qui renvoie la liste de booléens la plus courte représentant l'ensemble des entiers de L. Tester la fonction `EtoB` sur la liste `[5,1,2,6,2]`.
4. Écrire une fonction `bunion` de deux arguments, deux listes de booléens P et Q, qui renvoie la liste de booléens la plus courte représentant l'union des ensembles représentés par P et Q.
5. Écrire une fonction `BtoE` d'argument une liste P de booléens qui renvoie l'ensemble d'entiers représenté par P .
6. En déduire une fonction union de deux arguments, des listes d'entiers naturels, qui renvoie l'union de ces deux ensembles.
7. On peut coder également un ensemble d'entiers naturels Ω par l'entier $n(\Omega) = \sum_{i\in\Omega} 2^i$. Par exemple, l'ensemble $\{1,3\}$ est représenté par l'entier 10. Écrire une fonction `BtoN` d'argument une liste P de booléens qui renvoie l'entier codant l'ensemble représenté par P , ainsi qu'une fonction `NtoB` d'argument n un entier et renvoyant la liste de booléens la plus courte représentant l'ensemble codé par n.

Planche 83 — Algorithmique - Année 2021

Soient un entier naturel non nul n et l'ensemble $E_n = [\![1, n]\!]$. Une bijection $p : E_n \to E_n$ est appelée une permutation de E_n. Dans la suite, une permutation p de E_n sera représentée avec la liste $[p(1), \ldots, p(n)]$. Par exemple, $[1,2]$ et $[2,1]$ représentent les deux permutations de E_2.

1. Observer et expliquer ce que fait le code suivant :

```
M = []
L = [[1,2],[2,1]]
for p in L:
    for k in range(3):
            m = p[:]
        m.insert(k, 3)
        M.append(m)
print(M)
```

2. Écrire une fonction `permut` qui prend un entier naturel non nul `n` et qui retourne l'ensemble des permutations de E_n. Tester cette fonction pour n entre 3 et 6.
3. On appelle « point fixe » d'une permutation p, tout élément k de E_n tel que $p(k) = k$. Écrire une fonction `nbpf` d'argument L, une liste représentant une permutation p, renvoyant le nombre de points fixes de p.
4. On appelle « dérangement de E_n », toute permutation de E_n sans point fixe. Écrire une fonction `derang` d'argument un entier naturel non nul n renvoyant la liste de tous les dérangements de E_n.
5. Vérifier que pour n compris entre 2 et 9, le nombre de dérangement de E_n est égal à $n! \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}$.

Planche 84 — Algorithmique - Année 2021

En Biélosyldavie, la monnaie est le Zlotly. La banque centrale de Biélosyldavie émet uniquement des billets de 57, 62 et 72 Zlotlys.

1. Est-il possible de payer (exactement) 400 Zlotlys ? 600 Zlotlys ?
2. Créer une fonction comptage qui à un nombre `n` associe le nombre de manières (i.e. de combinaisons de billets possibles) pour payer (exactement) `n` Zlotlys.
3. Un enfant achète un croissant coûtant 4 Zlotlys. On sait qu'il a au plus 600 Zlotys sur lui, qu'il paie avec au moins deux types de billets différents et que le pâtissier lui rend la monnaie exacte. Combien cet enfant a-t-il donné au pâtissier ?

Planche 85 — Algorithmique - Année 2021

1. Écrire une fonction `petitsdiviseurs` d'argument un entier naturel n et renvoyant la liste des diviseurs de n dont le carré est inférieur ou égal à n. Tester cette fonction sur 47, 49 et 60.
2. Écrire une fonction `estPremier` d'argument un entier naturel n renvoyant un booléen indiquant si n est premier ou pas.
3. Écrire une fonction `nbp` d'argument n renvoyant le nombre de nombres premiers compris entre 2 et n.
4. Écrire une fonction `premapres` d'argument n renvoyant le plus petit nombre premier strictement supérieur à n. Tester `premapres` pour n = 1000.
5. Écrire une fonction `premavant` d'argument n renvoyant le plus grand nombre premier inférieur ou égal à n. Tester `premavant` pour n = 1000.

Planche 86 — **Algorithmique - Année 2021**

Pour décrire un graphe, il suffit de connaître n le nombre de sommets et L la liste de ses arêtes données dans n'importe quel ordre.

1. Représenter le graphe à 5 sommets dont la liste des arêtes est `[(2,4),(1,4),(1,2),(0,1)]`.
2. Écrire une fonction `non_isoles` d'argument la liste L des arêtes d'un graphe, renvoyant la liste de ses sommets non isolés, c'est-à-dire reliés par au moins une arête.
3. Écrire une fonction `degre` de deux arguments L et k qui renvoie le degré du sommet k dans le graphe d'arêtes L, c'est-à-dire le nombre d'arêtes dont ce sommet est l'une des extrémités. Par exemple, pour le graphe de la première question, les degrés respectifs des sommets 0, 1 et 3 sont 1, 3 et 0.
4. On appelle « liste d'adjacence » d'un graphe à n sommets, la liste de longueur n dont l'élément d'indice k est lui-même une liste répertoriant l'ensemble des sommets reliés par une arête au sommet k. Écrire une fonction adjacence de deux arguments, le nombre n de sommets d'un graphe et la liste L de ses arêtes, renvoyant la liste d'adjacence du graphe. Par exemple, pour le graphe de la première question, la liste d'adjacence est `[[1],[0,2,4],[1,4],[],[1,2]]`.
5. Écrire une fonction `degmax` d'argument une liste d'adjacence A d'un graphe, renvoyant le sommet dont le numéro est le plus grand parmi tous ceux de degré maximum.
6. On dit qu'une liste de sommets $[n_0,\dots,n_p]$ est un « chemin de longueur p » lorsque, pour tout i compris entre 0 et $p-1$, il existe une arête entre les sommets n_i et n_{i+1}. Écrire une fonction chemin de trois arguments, le nombre n de sommets d'un graphe, la liste L de ses arêtes et une liste C de sommets, qui renvoie un booléen indiquant si C est effectivement un chemin du graphe, ou pas. Vérifier que `[0,1,2]` et `[0,1,4,2,1]` sont des chemins du graphe de la première question, mais pas `[0,2,1]`.
7. Écrire une fonction relies de deux arguments, une liste L d'arêtes et le numéro k d'un sommet, renvoyant la liste des numéros des sommets reliés au sommet k par au moins un chemin.

Planche 87 — **Algorithmique - Année 2019**

On appelle entier palindrome un entier naturel non nul qui est égal à l'entier obtenu en renversant l'ordre de ses chiffres. Par exemple, 22, 121 et 2552 sont des entiers palindromes et 13, 211 et 2525 n'en sont pas. Attention, il ne peut y avoir de 0 comme premier ou dernier chiffre d'un entier palindrome.

1. Après avoir observé dans la console ce que donne `list(str(123))`, écrire une fonction `isp` d'argument un entier naturel non nul qui renvoie un booléen indiquant si l'entier est un palindrome, ou pas. Par exemple, `isp(1245421)` donne `True` alors que `isp(1245422)` donne `False`.
2. Afficher la liste de tous les palindromes compris entre 1 et 1000, obtenue grâce à la fonction `isp`, ainsi que le nombre de ses éléments.
3. Écrire une fonction `palp` d'argument un entier naturel non nul p qui renvoie la liste de tous les palindromes à $2p$ chiffres, construite à partir des nombres de p chiffres. Vérifier que 1001, 2002, 3003 sont éléments de la liste `palp(2)`, qui doit comporter 90 éléments.
4. En déduire une fonction `palindromes` d'argument un entier naturel non nul n qui renvoie la liste de tous les palindromes à n chiffres.
5. Afficher les entiers palindromes d'au plus 8 chiffres, de carrés palindromes. Que peut-on conjecturer?
6. Écrire une fonction `postulants` d'arguments un entier naturel non nul p, qui renvoie la liste des palindromes d'au plus $2p$ chiffres qui ne contiennent que des 0 et des 1, avec éventuellement un 2 en position centrale ou aux extrémités. Afficher le nombre d'éléments de la liste `postulants(6)`, ainsi que le nombre d'éléments de celle-ci dont les carrés ne sont pas des palindromes.

Planche 88 — Algorithmique - Année 2019

Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on note E_n la liste $[1,\dots,n]$ des entiers de 1 à n. On représente une partie A de E_n par la liste $[\alpha_1,\cdots,\alpha_p]$ où $\alpha_1 < \cdots < \alpha_p$. Par convention, la partie vide est représentée par la liste vide [ ].

1. On considère la fonction suivante :

```
def A(listes, numero):
    resultat = []
    for L in listes:
        resultat.append(L + [numero])
    return resultat
```

   Quel est le type de l'argument listes ? Que renvoie la fonction A ?

On représente un ensemble de parties de E_n par une liste de listes représentant chacune des parties. Ainsi l'ensemble $\{\varnothing,\{2\},\{3,4\}\}$ est représenté, par exemple, par $[[],[2],[3,4]]$.

2. Donner la liste `L0` représentant l'ensemble des parties de E_5 à 0 élément.
3. Écrire une fonction récursive `parties` de deux arguments n et p renvoyant la liste représentant l'ensemble des parties de E_n ayant au plus p éléments. On pourra remarquer que l'ensemble des parties à au plus p éléments de E_n se partitionne en l'ensemble des parties à au plus p éléments de E_n contenant n et l'ensemble des parties à au plus p éléments de E_n ne contenant pas n.
4. Donner la liste `L1` représentant l'ensemble des parties de E_5 à 1 élément, et celle `L5` représentant l'ensemble des parties de E_5 à 5 éléments.
5. Écrire une fonction récursive `parties2` de deux arguments n et p renvoyant la liste représentant l'ensemble des parties de E_n à p éléments.

Planche 89 — Algorithmique - Année 2019

Pour un entier naturel non nul n, son nombre de diviseurs est le nombre d'entiers naturels inférieurs ou égaux à n qui le divisent. Si cet entier n a strictement plus de diviseurs que chacun des entiers naturels qui le précèdent, on dit que c'est un nombre riche.

1. Écrire une fonction `nbdiv` d'argument un entier naturel n qui renvoie le nombre de diviseurs de n. La tester pour $n = 60$.
2. Écrire une fonction `riches` d'argument un entier naturel K qui renvoie les K premiers nombres riches sous forme d'une liste de couples (n,d), où d est le nombre de diviseurs de n. Par exemple, `riches(3)` doit donner `[[1,1],[2,2],[4,3]]`. Faire afficher les 16 premiers nombres riches.
3. Écrire une fonction `facteursPremiers` d'argument un entier naturel n qui renvoie la liste des facteurs premiers de n, avec répétitions si nécessaire. Par exemple, l'instruction `facteursPremiers(360)` doit renvoyer `[2,2,2,3,3,5]`.
4. Modifier la fonction `facteursPremiers` de sorte qu'elle renvoie la décomposition en facteurs premiers de n sous la forme d'un dictionnaire dont les clés sont les facteurs premiers p de n et la valeur associée i est le nombre de fois où apparaît le facteur premier p dans la décomposition. Par exemple, l'exécution de la commande `facteursPremiers(360)` doit maintenant renvoyer `{2:3, 3:2, 5:1}`.
5. En utilisant la fonction `facteursPremiers` sur les premiers nombres riches, que peut-on conjecturer sur le lien entre la décomposition en facteurs premiers et le nombre de diviseurs ?

Planche 90 — Algorithmique - Année 2019

1. Écrire une fonction `spirale` d'argument une liste L qui renvoie la liste obtenue en prenant d'abord le dernier terme de L, puis le premier, puis l'avant-dernier, puis le deuxième, etc. Vérifier que l'exécution de l'instruction `spirale([1,2,3,4,5,6])` donne `[6,1,5,2,4,3]` et que `spirale([1,2,3,4,5,6,7])` donne `[7,1,6,2,5,3,4]`.
2. Vérifier que si l'on itère la fonction `spirale` sur `L=[1,2,3,4,5,6]` on retombe sur L à la sixième itération. Qu'en est-il pour `L=[1,2,3,4,5,6,7]` ?
3. Écrire une fonction `periode` d'argument un entier n qui renvoie le nombre minimum p d'itérations de la fonction `spirale` pour retomber sur la liste `[1,2,...,n]`, en partant de cette même liste.
4. Déterminer les entiers inférieurs ou égaux à 99 tels que `periode(n) = n`.
5. À l'aide des instructions `plot` et `show` du module `matplotlib.pyplot`, tracer `periode(n)/n` en fonction de n, pour n compris entre 1 et 99. Déterminer la valeur de n qui minimise `periode(n)/n`.

Planche 91 — Algorithmique - Année 2018

On dit qu'un nombre entier n est une puissance finale d'un nombre entier non nul a si l'écriture en base 10 de a^n se termine par n, par exemple : $2^{36} = 68719476736$ donc 36 est une puissance finale de 2.

1. Écrire une fonction booléenne `PF` de deux arguments a et n, qui teste si n est une puissance finale de a.
2. Écrire une fonction `LF` de deux arguments a et N, qui renvoie la liste des puissances finales de a inférieures ou égales à N. Tester `LF(2,1000)` et `LF(7,1000)`.
3. Écrire une fonction `LF2` de deux arguments A et n, qui renvoie la liste des entiers inférieurs ou égaux à A dont n est une puissance finale. Tester `LF2(100,36)` et `LF2(1000,13)`.
4. Écrire une fonction `FF` d'un argument entier non nul a, qui renvoie le premier nombre n puissance finale de a en limitant le temps de recherche à 10 secondes (on pourra utiliser la fonction `time` du module `time`). Tester `FF(8)` et `FF(10)`.

Planche 92 — Algorithmique - Année 2018

1. Expliquer ce que fait la fonction `chiffres` définie ci-dessous.

```
def chiffres(n):
    L = []
    while n != 0:
        L.append(n % 10)
        n = n // 10
    return L[::-1]
```

Soit n un entier naturel non nul possédant p chiffres. Dans cet exercice, on dit que le nombre n est « narcissique » si la somme des puissances p-ième de ses chiffres vaut n.

2. Montrer que 93084 est un nombre narcissique.
3. Écrire une fonction `narcisse` d'argument n qui renvoie un booléen indiquant si n est narcissique.
4. Afficher tous les nombres narcissiques compris entre 0 et 10000.
5. Écrire une fonction `narcis_suiv` d'arguments n et N qui renvoie le premier entier naturel narcissique plus grand que n, en limitant la recherche aux nombres inférieurs ou égaux à N.
6. Déterminer l'ensemble des nombres premiers et narcissiques compris entre 1 et 10000.

Planche 93 — **Algorithmique - Année 2018**

1. On considère un nombre n. Que donne la commande `list(str(n))` ?
2. Comment récupérer le chiffre des unités d'un nombre entier donné ? Celui des dizaines ? Tester cette méthode sur le nombre 2015.
3. Écrire une fonction `transforme` d'argument un entier naturel n et qui renvoie le nombre obtenu par la méthode suivante : les chiffres de rang impair (en partant des unités) sont inchangés ; les chiffres de rang pair (en partant des unités) sont doublés, si ce double est supérieur ou égal à 10 on le remplace par la somme de ses chiffres (par exemple, 3 est remplacé par 6 et 7 par 5). Par exemple, le nombre 43281 est transformé en 46271.
4. Déterminer les nombres inférieurs à 10000 invariants par `transforme`. Expliquer le résultat obtenu.

Planche 94 — **Algorithmique - Année 2018**

Un échiquier est un plateau de 8 lignes et 8 colonnes. Ces lignes et ces colonnes seront, dans cet exercice, numérotées de 0 à 7. Une position de l'échiquier est un couple $[i, j]$ d'entiers compris entre 0 et 7 inclus, avec i le numéro de ligne et j le numéro de colonne. Un cavalier placé sur l'échiquier se déplace en bougeant de 2 cases dans une direction (verticale ou horizontale) et de 1 case perpendiculairement. Si le cavalier est loin des bords de l'échiquier, il a 8 possibilités de déplacements, mais il en a moins s'il est près des bords.

1. Illustrer sur un brouillon les deux cas énoncés précédemment.
2. Écrire une fonction `valide` prenant en argument deux entiers relatifs i et j et renvoyant un booléen indiquant si le couple $[i, j]$ est une position valide.
3. Écrire une fonction `coupsSuivants` prenant en argument une position $[i, j]$ et renvoyant la liste des positions que peut atteindre un cavalier placé en $[i, j]$ en un seul coup.
4. Écrire une fonction `cavalier` prenant en argument une position $[a, b]$ et renvoyant un tableau T carré d'ordre 8 telle que $T[i, j]$ est le nombre minimum de coups nécessaires à un cavalier placé au départ en position $[a, b]$ pour arriver à la position $[i, j]$.

Planche 95 — **Algorithmique - Année 2018**

1. Écrire une fonction `C1` d'argument un entier naturel n qui renvoie la liste ordonnée de tous les carrés parfaits inférieurs ou égaux à n. Par exemple, `C1(10)` donne `[0,1,4,9]`. Tester `C1` pour $n = 100$.
2. Écrire une fonction `C2` d'argument un entier naturel n qui renvoie la liste ordonnée de tous les entiers naturels inférieurs ou égaux à n qui s'écrivent comme somme de deux carrés d'entiers naturels. Tester la fonction `C2` pour $n = 100$.
3. Écrire une fonction `decomp2` d'argument un entier naturel m qui renvoie la liste de tous les couples (p, q) d'entiers naturels tels que $m = p^2 + q^2$ et $p \leqslant q$.
4. Écrire une fonction `C3` d'argument un entier naturel n qui renvoie la liste ordonnée de tous les entiers naturels inférieurs ou égaux à n qui s'écrivent comme somme de trois carrés d'entiers naturels. Tester la fonction `C3` pour $n = 100$.
5. Vérifier que les entiers inférieurs à 2017 qui ne peuvent pas s'écrire comme la somme de trois carrés d'entiers sont exactement ceux qui peuvent s'écrire $4^k(8q + 7)$.
6. Vérifier que tous les entiers inférieurs à 2017 s'écrivent comme la somme de quatre carrés d'entiers.

III.C - Informatique - Planches à dominante simulation numérique

Planche 96 — Simulation numérique - Année 2023

1. Que fait la fonction `tirer` suivante ?

```
from math import ceil
from random import random

def tirer(n):
        return int(ceil(n*random()))
```

On considère une urne contenant $n \in \mathbb{N}^*$ boules numérotées de 1 à n. On effectue une succession de tirages de la façon suivante : on tire au hasard une boule (de numéro k), puis on la remet dans l'urne accompagnée de k boules identiques supplémentaires. On note X_k le numéro de la boule tirée au k-ième tirage.

2. Écrire une fonction `tirer2` simulant la variable aléatoire X_2.
3. Estimer $\mathrm{E}(X_2)$ pour $n \in \{10, 30, 50\}$.
4. Soit $U = [u_1, \ldots, u_n]$ où u_k est le nombre de boules de numéro k dans l'urne. Écrire une fonction `tirerLK` d'arguments `n` et `p` qui renvoie une liste $L = [\ell_1, \ldots, \ell_p]$ donnant le résultat des `p` premiers tirages.
5. Tracer $\mathrm{E}(X_p)$ en fonction de p.

Planche 97 — Simulation numérique - Année 2021

1. Faire tracer les courbes des fonctions $g : x \mapsto x\ln(x) - 2$ et $h : x \mapsto x^3 - 4x^2 + 2x - 1$ sur l'intervalle $[1, 5]$.
2. Rappeler le principe de la méthode de dichotomie pour résoudre numérique l'équation $g(x) = 0$.
3. Déterminer un encadrement $[a, b]$ de la solution de l'équation $g(x) = 0$ de sorte que $0 \leqslant b - a \leqslant 2^{-10}$.
4. Reprendre la question précédente avec la fonction h.
5. On va maintenant utiliser la fonction `bisect` du module `scipy.optimize` de Python. Lire l'aide sur cette fonction, puis l'utiliser pour résoudre à nouveau les deux équations précédentes.

Planche 98 — Simulation numérique - Année 2021

On veut étudier numériquement la courbeΓ décrite par le point $M(t)$ de coordonnées $(\rho(t)\cos(t), \rho(t)\sin(t))$ où $\rho(t) = \sqrt{h(\cos(2t))\cos(2t)}$ avec h la fonction qui vaut 1 sur $\mathbb{R}^+$ et 0 sur $\mathbb{R}_-^*$.

1. Écrire la fonction `rho` d'argument t qui renvoie $\sqrt{h(\cos(2t))\cos(2t)}$.
2. Écrire une fonction `pts` d'argument un entier naturel non nul n qui renvoie la liste des couples (x_i, y_i) représentant les coordonnées cartésiennes du point $M(t_i)$, sachant que t_i est la i-ème des $n+1$ valeurs résultant de la partition de l'intervalle $[0, 2\pi]$ en n intervalles de même longueur.
3. Faire tracer en repère orthonormé et sur un même graphique la ligne polygonale reliant les points de la liste `pts(n)`, pour $n = 50$ et $n = 1000$.
4. Écrire une fonction `longueur` d'argument une liste de couples (x_i, y_i) qui renvoie la longueur de la ligne polygonale reliant les points correspondants. Évaluer le longueur de Γ avec 5 chiffres significatifs.
5. Écrire une fonction `derivee` d'argument une liste de couples $p_i = (x_i, y_i)$ qui renvoie une autre liste de couples $p'_i = (x'_i, y'_i)$ de même longueur $n+1$ telle que $p'_i = 1/(2\delta t)(p_{i+1} - p_{i-1})$, avec $\delta t = 2\pi/n$. On remplacera les points manquants grâce à des considérations de périodicité. Faire tracer les courbes correspondant à `derivee(pts(n))`, pour $n = 50$, $n = 200$ et $n = 1000$.

Planche 99 — **Simulation numérique - Année 2021**

1. Observer et expliquer ce que font les instructions suivantes.

```
from numpy.random import rand
LR = rand(5,3,3)
LR[3]
LR < 0.5
1 * (LR < 0.5)
```

2. En déduire la proportion de matrices inversibles dans une liste de $N = 10000$ matrices carrées d'ordre 3 dont chaque coefficient est tiré au hasard selon une loi de Bernoulli (valant 0 ou 1) de paramètre $1/2$. On pourra utiliser l'instruction `det` du module `numpy.linalg` de Python.
3. Écrire une fonction `listes` récursive d'argument n renvoyant la liste de toutes les listes de longueur n dont les éléments valent 0 ou 1.
4. Utiliser cette fonction pour générer toutes les matrices carrées d'ordre 3 à coefficients dans $\{0,1\}$, et calculer la proportion de matrices inversibles parmi ces matrices. Comparer cette proportion avec la fréquence mesurée à la question 2.
5. Quelles sont les valeurs possibles du déterminant d'une matrice carrée d'ordre 3 à coefficients dans l'ensemble $\{0,1\}$? Établir alors la loi de probabilité du déterminant d'une matrice carrée d'ordre 3 à coefficients dans $\{0,1\}$. Comparer avec les fréquences obtenues par la simulation de la question 2.

Planche 100 — **Simulation numérique - Année 2021**

1. Le tableau suivant donne les coordonnées $(x(t), y(t))$ d'un point $M(t)$ en divers instants t.

t	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5
x	1	0	-1	0	1
y	0	1	0	-1	0

   (a) Définir deux listes `LX` et `LY` contenant les abscisses et les ordonnées du point $M(t)$ aux divers instants t.
   (b) Représenter les points aux divers instants t ainsi que la ligne polygonale joignant ces points.
   (c) Calculer la longueur de cette ligne polygonale

2. Les coordonnées du point $M(t)$ sont maintenant stockées dans un fichier `data100.txt`. Chaque ligne de ce fichier est constituée des données t, $x(t)$, $y(t)$ associées à un point $M(t)$.
   (a) À partir de ce fichier, définir trois listes `LT`, `LX` et `LY` contenant les instants t, les abscisses et les ordonnées du point $M(t)$.
   (b) Vérifier que la liste `LT` est bien ordonnée selon ses valeurs croissantes.
   (c) Représenter les points aux divers instants t ainsi que la ligne polygonale joignant ces points.
   (d) Calculer la longueur de cette ligne polygonale.
   (e) Quelle est la vitesse moyenne sur l'ensemble du parcours ?

Planche 101 — **Simulation numérique - Année 2021**

Soit un pendule amorti, repéré par son angle $a(t)$ avec la verticale, fonction du temps t exprimé en secondes. On suppose que la tige est de longueur constante, que le pendule est initialement en position verticale et qu'on le lance avec une vitesse angulaire initiale w_0. L'angle $a(t)$ satisfait alors l'équation différentielle :

$$\begin{cases} a''(t) &= -1.1 \times \sin(a(t)) - 0.8 \times a'(t) \\ a(0) &= 0 \\ a'(0) &= w_0. \end{cases} \quad (1)$$

1. Au brouillon, déterminer une fonction $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ tel que, si l'on pose $u(t) = (a(t), a'(t))$, le problème (1) soit équivalent au probème (2) : $u'(t) = \varphi(u(t))$, avec la condition initiale $u(0) = (a_0, w_0)$.
2. En utilisant la fonction `odeint` du module `scipy.integrate` de Python, résoudre numériquement le problème (2) pour la t dans l'intervalle $[0,25]$, la vitesse angulaire initiale w_0 valant successivement les valeurs 1, 2, 4 et 8 $\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$. On prendra garde à définir soigneusement les arguments de cette fonction en lisant attentivement l'aide en ligne.
3. Tracer ces quatre courbes, avec en abscisses t en secondes et avec en ordonnées $a(t)$ en degrés.
4. Comment expliquer physiquement la différence de comportement asymptotique des solutions ?
5. Déterminer une valeur approchée à 10^{-4} $\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$ près de la valeur de $w_0 \in [2,4]$ pour laquelle ce changement de comportement asymptotique a lieu. On pourra faire une recherche dichotomique.

Planche 102 — **Simulation numérique - Année 2021**

Pour les entiers n et p tels que $n \geqslant 2$ et $p \geqslant 1$, on considère la matrice $M(n,p)$ carrée d'ordre n dont les coefficients entiers s'écrivent $m_{i,j} = ((i-1)n+j)^p$ pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$. On cherche à étudier numériquement la conjecture suivante : pour tout $p \in \mathbb{N}^*$, il existe un entier n au moins égal à 2 tel que $\det(M(n,p)) = 0$.

1. Écrire une fonction `M` de deux arguments n et p, renvoyant la matrice $M(n,p)$.
   Afficher les matrices $M(4,1)$, $M(4,2)$ et $M(4,3)$.
2. Grâce à la fonction `det` du module `scipy.linalg` de Python, essayer de calculer le déterminant de la matrice $M(20,12)$. Grâce à la fonction `eigvals` du module `scipy.linalg` de Python, obtenir la liste des valeurs propres de $M(20,12)$. Commenter.
3. Écrire une fonction `A` de deux arguments n et p, renvoyant la matrice carrée $A(n,p)$ d'ordre n dont les coefficients sont $a_{i,j} = ((i-1+j/n)/i)^p$ pour tout $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$.
4. Au brouillon, exprimer le déterminant de $A(n,p)$ en fonction de celui de $M(n,p)$.
5. Définir une fonction `ordreNum` d'argument p qui renvoie le premier nombre entier n tel que la plus petite en module des valeurs propres de $A(n,p)$ puisse être considérée comme nulle, c'est-à-dire de module inférieur à 10^{-15} fois le plus grand des modules. Tester `ordreNum` pour p de 1 à 20.
6. À l'aide du type `Matrix` et de la fonction `det` du module `sympy.matrices`, qui permettent de faire du calcul exact, vérifier que le plus petit entier n tel que $\det(M(n,p)) = 0$ est $n = p+2$ pour $1 \leqslant p \leqslant 20$.

Planche 103 — Simulation numérique - Année 2019

On définit la suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ à valeurs dans $\{0,1\}$ par :

$$t_0 = 0 \quad \text{et} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad \begin{cases} t_{2n} &= t_n \\ t_{2n+1} &= 1 - t_n. \end{cases}$$

1. Écrire une fonction récursive `t` d'argument un entier naturel n et renvoyant t_n.

On appelle « mot T » le mot binaire infini obtenu en concaténant les t_i : `"0110100110010110..."`.

2. Écrire une fonction `mot` d'argument un entier naturel n non nul et renvoyant, sous forme d'une chaîne de caractères, le mot binaire constitué des n premiers caractères du mot T. Par exemple, l'appel de `mot(5)` doit renvoyer la chaîne `"01101"`. Faire afficher `mot(20)`.
3. Écrire une fonction `nbseq` prenant deux arguments en entrée, un entier naturel n non nul et une chaîne de caractères `seq`, calculant le nombre d'occurrences du mot binaire `seq` dans le mot `mot(n)`.
   Par exemple, l'exécution de l'instruction `nbseq(15,"11")` doit renvoyer 3 car la séquence `"11"` apparaît 3 fois dans `mot(15)="011010011001011"`. Attention, on comptera deux fois `"11"` dans `"111"`.
4. Conjecturer la limite de `nbseq(n,seq)/n` pour n tendant vers l'infini, pour tous les mots binaires `seq` de un, deux puis trois chiffres.
5. Quelle est la complexité de la fonction `mot` ? Quelle(s) amélioration(s) pourrait-on essayer d'apporter ?

Planche 104 — Simulation numérique - Année 2019

Une fourmi ivre suit les lignes d'un quadrillage dont les intersections sont représentées par les couples de nombres entiers. Lorsqu'elle arrive à une intersection, elle a autant de chances de continuer tout droit, que de tourner à droite, de tourner à gauche, ou de revenir sur ses pas. On note C_a le carré formé des sommets de coordonnées $[x,y]$ avec $-a \leqslant x \leqslant a$ et $-a \leqslant y \leqslant a$.

1. Écrire une fonction avancer sans argument qui renvoie l'un des 4 couples $[1,0]$, $[0,-1]$, $[0,1]$ ou $[-1,0]$ avec équiprobabilité. On pourra utiliser la fonction `randint` du module `random`.
2. Simuler une trajectoire de la fourmi en partant de $[0,0]$ puis en faisant afficher les nœuds du quadrillage par où elle passe, jusqu'à ce qu'elle sorte du carré C_2.
3. Écrire une fonction `traj` d'argument a qui renvoie une trajectoire tirée au hasard, partant du centre $[0,0]$ et s'arrêtant lorsque la fourmi tente de sortir du carré C_a.
4. Tracer sur un même graphique 6 trajectoires différentes pour $a = 10$.
5. Soit L_a la longueur du trajet effectué par une fourmi pour sortir du carré C_a en partant de son centre. Définir une fonction `LM` de deux arguments a et N qui renvoie la moyenne des longueurs de trajet de N fourmis (N réalisations de la variable aléatoire L_a).
6. Tracer pour a entier compris entre 1 et 20, une estimation de $\mathrm{E}(L_a)$, l'espérance de L_a.

Planche 105 — **Simulation numérique - Année 2019**

Deux pions A et B se déplacent sur des cases numérotées par les entiers naturels en partant de 0. On lance un dé équilibré à 6 faces : on avance le pion situé sur la case de plus petit numéro en lui ajoutant le chiffre donné par le dé. La partie s'arrête quand les pions se rejoignent sur la même case.

1. Écrire une fonction `lancer()` qui modélise le lancer du dé à l'aide la librairie `random`.
2. Écrire une fonction `avancée` qui prend en argument la position $p = [a, b]$ des points A et B respectivement et qui renvoie leur position après un lancer.
3. Écrire une fonction `partie` qui simule une partie et qui renvoie la case d'arrivée des deux pions.
4. Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Estimer la probabilité que les pions se retrouvent sur la case k et la tracer sur un graphique.
5. Donner le plus petit entier $k \in \mathbb{N}$ tel que la probabilité que les pions soient arrivés sur une case de numéro au plus égal à k soit au moins de 99%.

Planche 106 — **Simulation numérique - Année 2019**

On considère $n+1$ cases numérotées de 0 à n ; on place une bille dans la première case puis on répète n fois l'action suivante : faire avancer la bille d'une case ou la laisser dans sa case, avec équiprobabilité. Le résultat final de l'expérience est le numéro de la case dans laquelle se trouve la bille à la fin.

1. Créer une fonction `tirer` d'argument n qui effectue la simulation de l'expérience précédente et renvoie le numéro de la case dans laquelle se trouve la bille à la fin. On pourra utiliser la fonction `randint` du module `random`.
2. On effectue N fois le processus précédent. Pour $n = 10$ et $N = 500$, tracer les points représentant, en fonction du numéro k de la case, la proportion de billes se trouvant à la fin dans la case k.
3. Programmer une fonction renvoyant le coefficient binomial $\binom{n}{k}$.
4. Rajouter sur la figure précédente les points représentant la loi de probabilité associée à l'expérience.
5. Refaire ce qui précède en supposant que, maintenant, la bille a une probabilité p d'avancer d'une case (et $1-p$ de rester sur place). On pourra utiliser la fonction `random` du module `random`.

Planche 107 — **Simulation numérique - Année 2018**

Soient $\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{C}$ les racines du polynôme $P = X^3 - 2X^2 - X + 1$ de sorte que $|\lambda| > |\mu| > |\nu|$. On considère la suite associée $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $(u_0, u_1, u_2) = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ et la relation $u_{n+3} = 2u_{n+2} + u_{n+1} - u_n$ pour tout élément $n \in \mathbb{N}$. On admet qu'il existe $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$ tel que $u_n = a\lambda^n + b\mu^n + c\nu^n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

1. Écrire une fonction `LU` prenant comme arguments N, x, y, z et renvoyant la liste des N premiers termes de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$. La tester pour $N = 10$, $x = 1$, $y = 2$, $z = 3$.
2. En utilisant $\dfrac{u_{n+1}}{u_n}$, trouver une valeur approchée de λ en prenant comme critère d'arrêt $|P| < 10^{-10}$
3. De même, approcher la valeur de ν grâce au polynôme $Q = X^3 P(1/X)$ et à une suite associée.
4. En déduire une valeur approchée de μ.

Planche 108 — **Simulation numérique - Année 2018**

On considère une suite de variables aléatoires indépendantes $(V_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ suivant toutes la loi uniforme sur l'ensemble $D = \{(0,1),(0,-1),(1,0),(-1,0)\}$. On définit $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $X_0 = (0,0)$ et $X_{n+1} = X_n + V_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On appelle « trajectoire de longueur n » la ligne brisée reliant les points de coordonnées $X_0, X_1, \ldots, X_n$.

1. Écrire une fonction `tirage` retournant un élément de D de manière aléatoire et uniforme. On pourra utiliser la fonction rand du module `numpy.random` de Python.
2. En déduire une fonction `trajectoire` d'argument n renvoyant le tirage d'une trajectoire de longueur n, sous forme d'une liste de couples `[x,y]`.
3. Tracer quelques trajectoires de longueurs 10, 100, 1000, puis 10000.
4. Écrire une fonction `premierRetour` d'argument m renvoyant le plus petit entier naturel non nul $n \leqslant m$ tel que $X_n = (0,0)$ s'il existe, et -1 sinon.
5. On note T le premier retour en $(0,0)$. Au moyen d'un programme, conjecturer si la variable aléatoire T est bien définie.

Planche 109 — **Simulation numérique - Année 2018**

On cherche à étudier numériquement les solutions de l'équation différentielle suivante :

$$y'(t) = t^2 - y(t)^3 \quad \text{avec} \quad y(-1.5) = a. \tag{1}$$

1. Pour $a = 2$ et un pas de discrétisation $h = 1/4$, puis $h = 1/8$, représenter les solutions approchées du problème (1) obtenues par la méthode d'Euler sur l'intervalle $[-1.5, 2.5]$.
2. En utilisant la fonction `odeint` du module `scipy.integrate` de Python, résoudre numériquement le problème (1) pour $a = 2$. On prendra garde à définir soigneusement les arguments de cette fonction en lisant attentivement l'aide en ligne.
3. Sur la figure existante, rajouter la courbe de la solution numérique obtenue à la question précédente.
4. Rajouter ensuite les courbes des solutions numériques pour $a = 1.3$ et $a = 0.1$. Qu'observe-t-on ?
5. Pour résoudre $y'(t) = f(t, y(t))$ avec $y(t_0) = a$, on utilise maintenant la suite (y_n) définie par $y_0 = a$ et

$$y_{k+1} = y_k + \frac{h}{2}\left(f(t_k, y_k) + f(t_{k+1}, y_k + hf(t_k, y_k))\right).$$

   Représenter, pour $a = 2$ et les mêmes pas de discrétisation qu'à la question 1, les solutions approchées obtenues par cette méthode. Expliquer pourquoi le résultat semble meilleur.

Partie IV Concours Mines -Télécom

Modalités de l'épreuve : L'épreuve dure 30 minutes sans temps de préparation.

L'épreuve consiste en la résolution, sans préparation, de deux exercices portant sur des parties différentes de l'ensemble des programmes de première et deuxième année.

ATTENTION : Les candidats déclarés admissibles au Concours Mines-Télécom doivent s'inscrire au préalable sur le site internet `www.concours-mines-telecom.fr` pour choisir la date et le lieu de leurs épreuves orales. Il est de la responsabilité du candidat de prendre un rendez-vous en dehors des périodes des épreuves orales des autres concours auxquels il serait convoqué.

Planche 110 — **Concours Mines -Télécom - Année 2023**

Exercice. Soit $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 3$. On considère la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}).$$

1. Montrer que la matrice M est diagonalisable.
2. Déterminer le rang de M. En déduire une valeur propre de M et sa multiplicité.
3. Soit $(\lambda, \mu) \in \mathbb{C}^2$ tel que $\mathrm{Sp}(M) = \{0, \lambda, \mu\}$. Calculer les nombres $\mathrm{tr}(M)$ et $\mathrm{tr}(M^2)$.
4. En déduire les valeurs propres de M.

Exercice. Étudier la convergence de la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 1} \frac{\sin\left((n(n+1))^{-1}\right)}{\cos\left(n^{-1}\right)\cos\left((n+1)^{-1}\right)}$.

Planche 111 — **Concours Mines -Télécom - Année 2023**

Exercice. On considère un réel $m \in \mathbb{R}$ et la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \\ 2-m & m-2 & m \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Déterminer les valeurs propres de A.
2. Pour quelle valeurs de m la matrice A est-elle diagonalisable ?
3. Pour $m = 2$, calculer A^k pour tout $k \in \mathbb{N}$.

Exercice. En utilisant une comparaison série-intégrale, déterminer un équivalent de $\ln(n!)$.

Planche 112 — Concours Mines -Télécom - Année 2023

Exercice. Soient X et Y deux variables aléatoires réelles indépendantes. On note $S = X + Y$.

1. Exprimer la fonction génératrice G_S de S en fonction de G_X et de G_Y.
2. On suppose que $X \sim \mathscr{B}(m,p)$ et $Y \sim \mathscr{B}(n,p)$ avec $(m,n,p) \in \mathbb{N}^2 \times [0,1]$. Donner les expressions des fonctions génératrices G_X et G_Y, puis en déduire la loi de S.
3. Déterminer la loi de S si $X \sim \mathscr{P}(\lambda)$ et $Y \sim \mathscr{P}(\mu)$ avec $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice. On considère la courbe paramétrée par la fonction vectorielle $f = (x,y) : [-\pi,\pi] \to \mathbb{R}$ où

$$\forall t \in [-\pi,\pi], \quad x(t) = 2\sin(t) - \sin(t)\cos(t) - t \quad \text{et} \quad y(t) = (1-\cos(t))^2.$$

1. Tracer la courbe paramétrée par f.
2. Calculer la longueur de la courbe.
3. Donner la base du repère de Frenet et calculer la courbure en un point régulier.

Planche 113 — Concours Mines -Télécom - Année 2023

Exercice. On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 4 & 0 \\ -3 & 5 & 9 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de A.
2. Soit $M \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$ tel que $M^2 = A$.
   (a) Montrer que $AM = MA$, puis en déduire qu'un vecteur propre de A est un vecteur propre de M.
   (b) En déduire que M est diagonalisable.

Exercice. On souhaite déterminer les fonctions continues $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(2x) = \int_0^x (x-t) f(2t)\,\mathrm{d}t + 1. \qquad (E)$$

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue vérifiant (E).
   (a) Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et calculer f'.
   (b) Montrer que f est solution d'une équation différentielle d'ordre 2.
2. En déduire toutes les fonctions continues vérifiant (E).

Planche 114 — Concours Mines -Télécom - Année 2022

Exercice. On définit la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+x^2t^2)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que la fonction f est définie et continue sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.
3. En déduire une expression de $f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice. Soit $A \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$. Montrer que $A \in \mathrm{SO}_2(\mathbb{R})$ si et seulement si $\det(A) = 1$ et $\mathrm{tr}\left(A^\top A\right) = 2$.

Planche 115 — **Concours Mines -Télécom - Année 2022**

Exercice. Justifier la convergence, puis calculer l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)(1+t^3)}$.

Exercice. Soit $u \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme nilpotent, i.e. il existe un entier $p \in \mathbb{N}^*$ tel que $u^p = 0$ et $u^{p-1} \neq 0$.

1. Soit $x \in E$ tel que $u^{p-1}(x) \neq 0$. Montrer que $\left(x, u(x), \dots u^{p-1}(x)\right)$ est libre.
2. On définit $v = \displaystyle\sum_{k=0}^{p-1} \frac{u^k}{k!}$. Montrer que $\mathrm{Ker}(u) = \mathrm{Ker}(v - \mathrm{Id}_E)$.

Planche 116 — **Concours Mines -Télécom - Année 2022**

Exercice. On considère sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$x y'' + (x-2)y' - 2y = 0. \qquad (E)$$

1. Déterminer les fonctions polynomiales solutions de (E).
2. Déterminer une solution de (E) sous la forme $x \mapsto \mathrm{e}^{ax}$ avec $a \in \mathbb{R}$.
3. En déduire les solutions de (E) sur $]0, +\infty[$, puis sur $\mathbb{R}$.

Exercice. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une famille de n vecteurs unitaires d'un espace euclidien E telle que

$$\forall x \in E \quad \|x\|^2 = \sum_{k=1}^{n} (x \mid e_k)^2.$$

Montrer que $(e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormée de E.

Planche 117 — **Concours Mines -Télécom - Année 2022**

Exercice. On considère le produit scalaire $\varphi : (M, N) \mapsto \mathrm{tr}\left(M^\top N\right)$ sur l'espace vectoriel

$$E = \left\{ \begin{pmatrix} x & y \\ -y & x \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \;\middle|\; (x, y) \in \mathbb{R}^2 \right\}.$$

1. Déterminer le projeté orthogonal sur E de la matrice $J = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$.
2. Quelle est la distance entre J et $E^\perp$?

Exercice. On considère la fonction $F : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \ln(t)\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que F est définie et de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer que F est solution d'une équation différentielle de la forme $xy' + y = h(x)$ sur $\mathbb{R}_+^*$ où h est une fonction que l'on précisera.
3. En déduire une expression de $F(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.

Planche 118 — Concours Mines -Télécom - Année 2022

Exercice. Pour quelle valeurs valeurs de $a \in \mathbb{R}$ l'intégrale $I_a = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{1-\sqrt{1+x}\mathrm{e}^{-ax}}{x^2}\,\mathrm{d}x$ converge-t-elle ?

Exercice. Soit $n \in \mathbb{N}$. On définit l'application φ sur $\mathbb{C}_n[X]$ par $\varphi : P \mapsto (X^2-1)P' - nXP$.

1. Montrer que φ est un endomorphisme de $\mathbb{C}_n[X]$.
2. Déterminer la matrice de φ dans la base canonique de $\mathbb{C}_n[X]$.
3. Calculer $\varphi(P_k)$ pour $P_k = (X-1)^k(X+1)^{n-k}$ avec $k \in [\![0,n]\!]$.
4. En déduire les valeurs propres de φ. L'endomorphisme φ est-il diagonalisable ?

Planche 119 — Concours Mines -Télécom - Année 2022

Exercice. On souhaite déterminer les fonctions continues $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) + \int_0^x t f(x-t)\,\mathrm{d}t = 1. \qquad (E)$$

1. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue vérifiant (E).
   (a) Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$, puis de classe $\mathscr{C}^2$.
   (b) Montrer que $f'' = -f$.
2. En déduire toutes les fonctions continues vérifiant (E).

Exercice. Soit Γ une courbe paramétrée par $z(t) = x(t) + \mathrm{i}y(t)$ avec x et y de classe $\mathscr{C}^1$.

1. Montrer que la courbure de Γ s'écrit $\gamma(t) = \dfrac{\big(\arg(z'(t))\big)'}{|z'(t)|}$.
2. Déterminer le rayon de courbure de la courbe paramétrée par $z(t) = \cos(t)\sin^2\left(\dfrac{t}{2}\right) + \mathrm{i}\sin(t)\sin^2\left(\dfrac{t}{2}\right)$

Planche 120 — Concours Mines -Télécom - Année 2021

Exercice. Justifier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_0^1 \frac{\ln(x)}{(1+x)\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$, puis la calculer en utilisant le changement de variable $x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$.

Exercice. Soit f un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie.

1. Montrer que si $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Im}(f)$, alors $\dim(E) = 2\,\mathrm{rang}(f)$ et $f \circ f = 0$.
2. Montrer la réciproque de la question précédente.

Planche 121 — Concours Mines -Télécom - Année 2019

Exercice. Soit F le sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$ engendré par les vecteurs $(1,2,-1,1)$ et $(0,0,1,0)$.

1. Déterminer une base orthonormale de F.
2. Déterminer la distance de $F^\perp$ au vecteur $(1,0,0,0)$.

Exercice. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note $f(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\operatorname{Arctan}(xt)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^*$ (on pourra se placer sur un segment).
3. Montrer que pour tout $x \in]0,1[$, on a $f'(x) = -\dfrac{\ln(x)}{1-x^2}$.

Planche 122 — Concours Mines -Télécom - Année 2019

Exercice. On note $E = \mathscr{C}^0([0,\pi],\mathbb{R})$ et on définit $\varphi : E^2 \to \mathbb{R}$ par $\varphi : (f,g) \mapsto \displaystyle\int_0^{\pi} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que φ est un produit scalaire sur E.
2. Déterminer la projection orthogonale de $h : x \mapsto x$ sur le sous-espace vectoriel $F = \operatorname{Vect}(\cos, \sin)$ de E.
3. Que représente le nombre $\displaystyle\inf_{f\in F} \|h-f\|$?
4. Déterminer $\displaystyle\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2} \int_0^{\pi} \big(t - a\cos(t) - b\sin(t)\big)^2\,\mathrm{d}t$.

Exercice. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On désigne par $J \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ la matrice dont tous les coefficients valent 1.

1. La matrice J est-elle diagonalisable ?
2. Déterminer les valeurs propres de la matrice J.
3. Soit $f \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^n)$ un endomorphisme de rang 1. Est-ce que 0 est valeur propre de f ?

Planche 123 — Concours Mines -Télécom - Année 2019

Exercice. On considère la fonction d'une variable réelle $f : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \ln\left(1+\frac{x}{t^2}\right)\mathrm{d}t$.

1. Déterminer l'ensemble de définition I de f.
2. Déterminer une expression de $f(x)$ pour tout $x \in I$.

Exercice. Soit E un espace vectoriel de dimension finie.

1. Si $f \in \mathscr{L}(E)$ est un projecteur, quelle relation existe-t-il entre $\operatorname{rang}(f)$ et $\operatorname{tr}(f)$?
2. Si $f \in \mathscr{L}(E)$ vérifie $\operatorname{rang}(f) = \operatorname{tr}(f) = 1$, l'application f est-elle nécessairement un projecteur ?

Planche 124 — Concours Mines-Télécom - Année 2019

Exercice. On considère l'application f définie sur $\mathbb{R}_2[X]$ par $f : P \mapsto (X^2-1)P'(X) - 2XP(X)$.

1. Montrer que f est un endomorphisme de $\mathbb{R}_2[X]$.
2. L'endomorphisme f est-il diagonalisable ?

Exercice. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on note $S(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} \sin(xt)\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ et $C(x) = \displaystyle\int_0^{+\infty} t\cos(xt)\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer que les fonctions S et C sont définies et continues sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que S est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que $2C(x) = 1 - xS(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, puis déterminer S et C.

Planche 125 — Concours Mines-Télécom - Année 2019

Exercice. On considère la matrice $M = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -2 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

1. La matrice M est-elle orthogonale ?
2. Préciser ses éléments caractéristiques.

Exercice. On considère la courbe paramétrée $f : t \mapsto (\cos^3(t), \sin^3(t))$.

1. Déterminer les points réguliers de la courbe paramétrée f.
2. Déterminer les vecteurs $\overrightarrow{T}$ et $\overrightarrow{N}$ du repère de Frenet, puis une expression de l'angle $\alpha = \left(\vec{\imath}, \overrightarrow{T}\right)$.
3. En déduire la courbure aux points réguliers de la courbe paramétrée f.

Planche 126 — Concours Mines-Télécom - Année 2018

Exercice. Soit $(a,b,c,d,e) \in \mathbb{R}^5$. On considère la matrice $M = \dfrac{1}{3}\begin{pmatrix} 1 & 2 & a \\ -2 & b & d \\ 2 & c & e \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R})$.

1. Déterminer les éléments $(a,b,c,d,e) \in \mathbb{R}^5$ pour que M soit la matrice d'une rotation.
2. Déterminer les éléments caractéristiques des rotations trouvées.

Exercice. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère l'intégrale $I_n = \displaystyle\int_0^1 \mathrm{Arctan}(t+t^n)\,\mathrm{d}t$.

1. Montrer pour tout $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ vérifiant $0 \leqslant a \leqslant b$ que l'on a $\mathrm{Arctan}(b) - \mathrm{Arctan}(a) \leqslant b - a$.
2. En déduire la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Planche 127 — **Concours Mines -Télécom - Année 2018**

Exercice. Soit $E = \mathscr{C}([0,1],\mathbb{R})$. Pour tout $f \in E$, on définit $T(f) : [0,1] \to \mathbb{R}$ par $T(f) : x \mapsto \displaystyle\int_0^1 \min(x,t) f(t)\,\mathrm{d}t$.

1. Soit $x \in [0,1]$. Tracer le graphe de la fonction $t \mapsto \min(x,t)$.
2. Montrer que T est un endomorphisme de E. Est-il surjectif?
3. Montrer que si f est un vecteur propre de T associé à la valeur propre $\lambda \in \mathbb{R}$, alors f est solution de l'équation différentielle $\lambda y'' + y = 0$.
4. L'application T est-elle injective?
5. Déterminer les valeurs propres et les vecteurs propres de T.

Exercice. Une famille a deux enfants dont l'un est un garçon. Quelle est la probabilité que les deux soient des garçons?

Planche 128 — **Concours Mines -Télécom - Année 2017**

Exercice. Déterminer en fonction de $m \in \mathbb{R}$, la nature de la courbe d'équation $(1+m)(x^2+y^2) - 2mxy = m$.

Exercice. Déterminer les couples $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ pour lesquelles la série $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \left(2 + (an+b)\ln\left(\frac{n+2}{n+4}\right)\right)$ converge.

Planche 129 — **Concours Mines -Télécom - Année 2016**

Exercice. On considère la courbe paramétrée $f : t \mapsto (3t^2, 2t^3)$.

1. Étudier et tracer la courbe paramétrée f.
2. Déterminer les équations de la tangente et de la normale à la courbe au point de paramètre t.

Exercice. Montrer que l'intégrale $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^t + \mathrm{e}^{-t}}$ existe et calculer sa valeur.