

CHAPITRE 13

Isométries d'un espace euclidien

Jérôme VON BUHREN

<http://vonbuhren.free.fr>

Lycée Couffignal - PT*

Ce chapitre est le prolongement du chapitre sur les espaces préhilbertiens. Nous allons étudier les endomorphismes d'un espace euclidien préservant la norme des vecteurs : les isométries. Nous nous intéresserons notamment à leur classification en petite dimension. Finalement, nous verrons un résultat important sur la réduction des matrices symétriques réelles.

Les isométries en dimension 2 et 3 sont souvent utilisées en science pour passer des coordonnées dans un repère orthonormé à celles dans un autre repère orthonormé.

Dans tout le chapitre, on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et un espace vectoriel euclidien E de dimension n .

Définition (Matrice orthogonale)

On dit qu'une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est orthogonale si elle vérifie $M^T M = I_n$.

Remarques 1

- a) Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est orthogonale si et seulement si ses vecteurs colonnes forment une base orthonormée de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$.
- b) Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est orthogonale si et seulement si ses vecteurs lignes forment une base orthonormée de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$.
- c) Une matrice $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ est orthogonale si et seulement si elle est inversible et vérifie $M^{-1} = M^T$.

Définition (Groupe orthogonal d'ordre n)

Le groupe orthogonal d'ordre n est l'ensemble des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On le note $O_n(\mathbb{R})$ ou $O(n)$.

Exemple 1

Les deux matrices ci-dessous sont orthogonales.

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix} \in O_2(\mathbb{R}), \quad \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \in O_3(\mathbb{R}).$$

Théorème 1

L'ensemble $O_n(\mathbb{R})$ est un groupe, i.e. il vérifie les trois propriétés suivantes.

- (i) La matrice I_n appartient à $O_n(\mathbb{R})$.
- (ii) Pour tout $M \in O_n(\mathbb{R})$, la matrice M est inversible et on a $M^{-1} \in O_n(\mathbb{R})$.
- (iii) Pour tout $(M, N) \in O_n(\mathbb{R})^2$, on a $MN \in O_n(\mathbb{R})$.

Proposition 1

Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E . Une base $\mathcal{C}$ de E est orthonormée si et seulement si la matrice de passage $P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}}$ est orthogonale.

Proposition 2

Si $M \in O_n(\mathbb{R})$, alors on a $\det(M) = \pm 1$.

Définition (Groupe spécial orthogonal d'ordre n)

Le groupe spécial orthogonal d'ordre n est l'ensemble des matrices orthogonales de $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ dont le déterminant est égal à 1. On le note $SO_n(\mathbb{R})$ ou $SO(n)$.

Exemple 2

Les deux matrices ci-dessous sont orthogonales, mais seule la seconde est dans le groupe spécial orthogonal.

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \in O_3(\mathbb{R}) \setminus SO_3(\mathbb{R}), \quad \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \in SO_3(\mathbb{R}).$$

Théorème 2

L'ensemble $\text{SO}_n(\mathbb{R})$ est un groupe, i.e. il vérifie les trois propriétés suivantes.

- (i) La matrice I_n appartient à $\text{SO}_n(\mathbb{R})$.
- (ii) Pour tout $M \in \text{SO}_n(\mathbb{R})$, la matrice M est inversible et on a $M^{-1} \in \text{SO}_n(\mathbb{R})$.
- (iii) Pour tout $(M, N) \in \text{SO}_n(\mathbb{R})^2$, on a $MN \in \text{SO}_n(\mathbb{R})$.

Si $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ sont deux bases orthonormées de l'espace euclidien E , alors la matrice de passage $P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}}$ est orthogonale d'après les résultats précédents, donc son déterminant est égal à ± 1 .

Définition (Espace euclidien orienté)

Un espace euclidien orienté est un espace euclidien dans lequel on a choisi une base orthonormée $\mathcal{C}$ de E .

Définition (Base directe et indirecte)

Soit E un espace euclidien orienté par une base orthonormée $\mathcal{C}$. Une base orthonormée $\mathcal{B}$ de E est dite

- (i) directe si la matrice de passage de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{B}$ est de déterminant 1 ;
- (ii) indirecte si la matrice de passage de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{B}$ est de déterminant -1 .

Remarques 2

- a) On dit que deux bases orthonormées $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ de l'espace euclidien E définissent la même orientation si le déterminant de la matrice de passage $P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}}$ est égal à 1. Dans ce cas, le choix de $\mathcal{B}$ ou de $\mathcal{C}$ pour orienter E induit les mêmes bases directes et les mêmes bases indirectes.
- b) On en déduit qu'il y a deux orientations possibles pour un espace euclidien.

Exemple 3

Si l'espace $\mathbb{R}^3$ est orienté par la base canonique (i, j, k) , alors les bases (i, j, k) , (j, k, i) et (k, i, j) sont directes, tandis que les bases (i, k, j) , (k, j, i) et (j, i, k) sont indirectes.

Définition (Isométrie vectorielle)

Un endomorphisme $\varphi \in \mathcal{L}(E)$ est une isométrie vectorielle (ou un automorphisme orthogonal) si φ conserve la norme des vecteurs, i.e.

$$\forall x \in E, \quad \|\varphi(x)\| = \|x\|.$$

Exemple 4

Les applications $\pm \text{Id}_E \in \mathcal{L}(E)$ sont des isométries vectorielles.

Définition (Groupe orthogonal d'un espace euclidien)

Le groupe orthogonal de l'espace euclidien E est l'ensemble des isométries vectorielles de E . On le note $O(E)$.

Théorème 3

L'ensemble $O(E)$ est un groupe, i.e. il vérifie les trois propriétés suivantes.

- (i) L'endomorphisme Id_E appartient à $O(E)$.
- (ii) Pour tout $u \in O(E)$, l'endomorphisme u est un isomorphisme et $u^{-1} \in O(E)$.
- (iii) Pour tout $(u, v) \in O(E)^2$, on a $u \circ v \in O(E)$.

Théorème de caractérisation des isométries

Soit $\varphi \in \mathcal{L}(E)$. Les assertions suivantes sont équivalentes.

- (i) L'application φ est une isométrie vectorielle.
- (ii) L'application φ conserve le produit scalaire, i.e.

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad (\varphi(x) \mid \varphi(y)) = (x \mid y).$$

- (iii) L'image de toute base orthonormée de E par φ est une base orthonormée de E .
- (iv) L'image d'une base orthonormée de E par φ est une base orthonormée de E .

Proposition (Caractérisation matricielle des isométries)

Soit $\mathcal{B}$ une base orthonormée de E . Un endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ est une isométrie vectorielle si et seulement si la matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ est orthogonale.

Remarque 3

Autrement dit, une fois que l'on a fixé une base orthonormée de E , les éléments de $O(E)$ correspondent bijectivement via leur matrice aux éléments de $O_n(\mathbb{R})$.

Proposition 3

Si un sous-espace vectoriel F de E est stable par une isométrie vectorielle $u \in \mathcal{L}(E)$, alors le sous-espace vectoriel $F^\perp$ est stable par u .

Proposition 4

Si $u \in O(E)$, alors on a $\det(u) = \pm 1$.

Définition (Isométrie vectorielle directe / indirecte)

Une isométrie vectorielle $u \in O(E)$ est dite directe si elle vérifie $\det(u) = 1$. Dans le cas contraire, on dit qu'elle est indirecte.

Définition (Groupe spécial orthogonal d'un espace euclidien)

Le groupe spécial orthogonal de l'espace euclidien E est l'ensemble des isométries vectorielles directes de E . On le note $\text{SO}(E)$.

Remarque 4

D'après les résultats précédents, une fois que l'on a fixé une base orthonormée de E , les éléments de $\text{SO}(E)$ correspondent bijectivement via leur matrice aux éléments de $\text{SO}_n(\mathbb{R})$.

Théorème 4

L'ensemble $\text{SO}(E)$ est un groupe, i.e. il vérifie les trois propriétés suivantes.

- (i) L'endomorphisme Id_E appartient à $\text{SO}(E)$.
- (ii) Pour tout $u \in \text{SO}(E)$, l'endomorphisme u est un isomorphisme et $u^{-1} \in \text{SO}(E)$.
- (iii) Pour tout $(u, v) \in \text{SO}(E)^2$, on a $u \circ v \in \text{SO}(E)$.

Définition (Symétrie orthogonale)

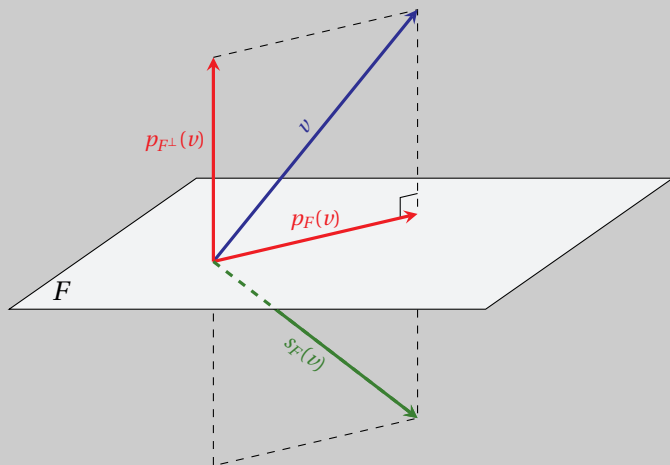
Soit F un sous-espace vectoriel de E . La symétrie orthogonale par rapport à F est la symétrie $s_F : E \rightarrow E$ par rapport à F et parallèlement à $F^\perp$.

Remarque 5

On a $s_F = p_F - p_{F^\perp} = 2p_F - \text{Id}_E$.

Illustration

La figure suivante représente géométriquement la symétrie orthogonale par rapport à F .



Exemple 5

Dans le chapitre sur les espaces préhilbertiens, on a vu que la projection orthogonale sur le plan vectoriel $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$ dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ est donnée par

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad p_H(x, y, z) = \left(\frac{2x - y - z}{3}, \frac{-x + 2y - z}{3}, \frac{-x - y + 2z}{3} \right).$$

On en déduit avec la relation $s_H = 2p_H - \text{Id}_{\mathbb{R}^3}$ que l'on a

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad s_H(x, y, z) = \left(\frac{x - 2y - 2z}{3}, \frac{-2x + y - 2z}{3}, \frac{-2x - 2y + z}{3} \right).$$

Proposition 5

Les symétries orthogonales sont des isométries vectorielles.

Définition (Réflexion)

Une réflexion est une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan.

Dans cette partie, on étudie les isométries d'un plan euclidien E orienté par une base orthonormée $\mathcal{C} = (i, j)$.

Proposition 6

Soit $u \in O(E)$ une isométrie d'un plan vectoriel euclidien orienté.

- (i) Si u est directe, alors il existe un réel $\theta \in \mathbb{R}$ tel que pour toute base orthonormée directe $\mathcal{B}$ de E , on a

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

- (ii) Si u est indirecte, alors pour toute base orthonormée directe $\mathcal{B}$ de E , il existe un réel $\theta \in \mathbb{R}$ tel que

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Remarques 6

a) En particulier, on vérifie dans la démonstration que

$$\mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid \theta \in \mathbb{R} \right\},$$

$$\mathrm{O}_2(\mathbb{R}) \setminus \mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \mid \theta \in \mathbb{R} \right\}.$$

b) Si on change l'orientation du plan choisi au début, le réel θ est remplacé par son opposé dans les deux propositions précédentes.

Illustration

Interprétons le résultat du théorème précédent.

Isométrie directe

Si u est une isométrie directe, alors pour tout base orthonormée directe $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ de E , on a

$$\begin{cases} u(e_1) &= \cos(\theta)e_1 + \sin(\theta)e_2 \\ u(e_2) &= -\sin(\theta)e_1 + \cos(\theta)e_2. \end{cases}$$

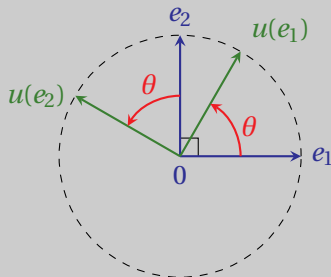
Isométrie indirecte

Si u est une isométrie indirecte, alors il existe une base orthonormée directe $\mathcal{B} = (e_1, e_2)$ de E telle que

$$\begin{cases} u(e_1) &= \cos(\theta)e_1 + \sin(\theta)e_2 \\ u(e_2) &= \sin(\theta)e_1 - \cos(\theta)e_2. \end{cases}$$

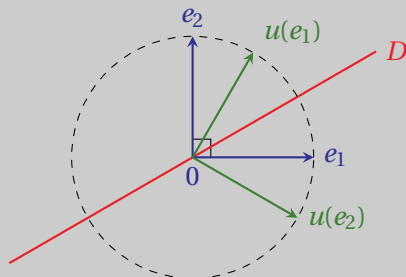
Illustration

Ces relations se reproduisent géométriquement.



On conclut qu'une isométrie directe du plan est une rotation d'angle θ .

Ces relations se reproduisent géométriquement.



On conclut qu'une isométrie indirecte du plan est une réflexion par rapport à une droite vectorielle D .

Bilan

Le tableau suivant résume la situation pour une isométrie $u \in O(E)$ d'un plan euclidien orienté.

Type	Nature	Valeurs propres réelles	Compléments
Directe	$u = \text{Id}_E$ est la rotation d'angle $\theta = 0 [2\pi]$	$\text{Sp}(u) = \{1\}$	$E_1(u) = E$
	$u = -\text{Id}_E$ est la rotation d'angle $\theta = \pi [2\pi]$	$\text{Sp}(u) = \{-1\}$	$E_{-1}(u) = E$
	u est la rotation d'angle $\theta \neq 0 [\pi]$	$\text{Sp}(u) = \emptyset$	Les valeurs propres complexes sont $e^{\pm i\theta}$.
Indirecte	u est la réflexion par rapport à D	$\text{Sp}(u) = \{\pm 1\}$	$\begin{aligned} E_1(u) &= D \\ E_{-1}(u) &= D^\perp \end{aligned}$

Exemple 6

Déterminons la nature de l'endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ défini par

$$\text{Mat}_{\mathcal{C}}(u) = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).$$

En notant $M = \text{Mat}_{\mathcal{C}}(u)$, on remarque que la matrice M est orthogonale et que $\det(M) = 1$. On en déduit que u est une isométrie directe du plan euclidien E , donc il s'agit d'une rotation d'après les résultats précédents. Finalement, on constate que

$$\text{Mat}_{\mathcal{C}}(u) = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) & -\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \end{pmatrix},$$

donc u est la rotation du plan euclidien orienté E d'angle $\frac{\pi}{3}$.

Exemple 7

Déterminons la nature de l'endomorphisme $u \in \mathcal{L}(E)$ défini par

$$\text{Mat}_{\mathcal{C}}(u) = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R}).$$

En notant $M = \text{Mat}_{\mathcal{C}}(u)$, on remarque que la matrice M est orthogonale et que $\det(M) = -1$. On en déduit que u est une isométrie indirecte du plan euclidien E , donc il s'agit d'une réflexion d'après les résultats précédents. De plus, on constate que

$$E_1(M) = \text{Ker}(\text{I}_2 - M) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \mid y = 2x \right\} = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right).$$

donc u est la réflexion par rapport à $D = \text{Vect}(i + 2j)$.

Remarque 7

L'étude de cette partie nous permet de définir rigoureusement la mesure d'un angle orienté de vecteurs dans un plan euclidien orienté. Si a et b sont deux vecteurs non nuls du plan euclidien orienté E , alors on peut vérifier qu'il existe une unique rotation $r_{a,b} \in \text{SO}(E)$ telle que

$$r_{a,b} \left(\frac{a}{\|a\|} \right) = \left(\frac{b}{\|b\|} \right).$$

La mesure de l'angle orienté (a, b) est défini comme l'unique réel θ modulo 2π tel que

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(r_{a,b}) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

où $\mathcal{B}$ est une base orthonormée directe du plan orienté E .

Dans cette partie, on étudie les isométries d'un espace euclidien E de dimension 3 orienté par une base orthonormée $\mathcal{C} = (i, j, k)$.

Proposition 7

Soit $u \in O(E)$ une isométrie d'un espace euclidien orienté E de dimension 3.

- (i) Si u est directe, alors il existe un réel $\theta \in \mathbb{R}$ et une base orthonormée directe $\mathcal{B}$ de E tels que

$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

- (ii) Si u est indirecte, alors il existe un réel $\theta \in \mathbb{R}$ et une base orthonormée directe $\mathcal{B}$ de E tels que

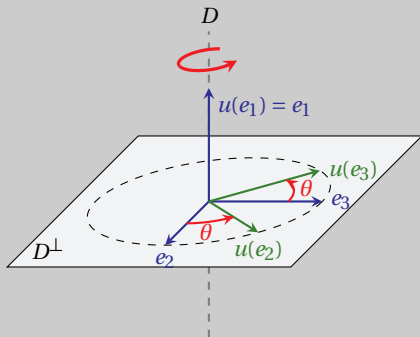
$$\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Illustration

Interprétons le résultat du théorème précédent.

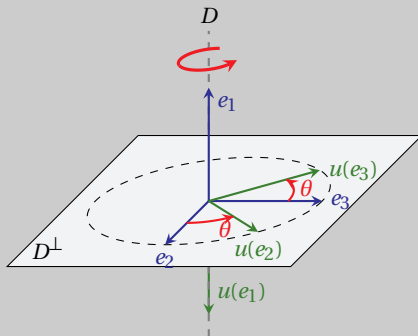
Isométrie directe

En notant $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base du théorème et en considérant la matrice, on a la figure suivante.



Isométrie indirecte

En notant $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base du théorème et en considérant la matrice, on a la figure suivante.



Illustration

On en déduit que u est la rotation d'axe D dirigé par le vecteur e_1 et d'angle θ .

On en déduit que l'isométrie u est la composée commutative entre :

- la rotation d'axe D dirigé par e_1 et d'angle θ ;
- la réflexion par rapport au plan $D^\perp = \text{Vect}(e_2, e_3)$.

Bilan

Le tableau suivant résume la situation pour une isométrie $u \in O(E)$ où E est un espace euclidien orienté de dimension 3.

Type	Nature	Valeurs propres réelles	Compléments
Directe	$u = \text{Id}_E$	$\text{Sp}(u) = \{1\}$	$E_1(u) = E$
	u est une symétrie orthogonale par rapport à une droite D (rotation d'angle $\theta = \pi [2\pi]$)	$\text{Sp}(u) = \{1, -1\}$	$\begin{aligned} E_1(u) &= D \\ E_{-1}(u) &= D^\perp \end{aligned}$
	u est la rotation d'axe D et d'angle $\theta \neq 0 [\pi]$	$\text{Sp}(u) = \{1\}$	$E_1(u) = D$

Bilan

Le tableau suivant résume la situation pour une isométrie $u \in O(E)$ où E est un espace euclidien orienté de dimension 3.

Type	Nature	Valeurs propres réelles	Compléments
Indirecte	$u = -\text{Id}_E$	$\text{Sp}(u) = \{-1\}$	$E_{-1}(u) = E$
	u est une réflexion par rapport au plan $D^\perp$ (isométrie indirecte d'angle $\theta = 0 \ [2\pi]$)	$\text{Sp}(u) = \{1, -1\}$	$\begin{aligned} E_1(u) &= D^\perp \\ E_{-1}(u) &= D \end{aligned}$
	u est l'isométrie indirecte d'axe D et d'angle $\theta \neq 0 \ [\pi]$	$\text{Sp}(u) = \{-1\}$	$E_{-1}(u) = D$

Dans cette partie, on suppose que E est un espace euclidien de dimension 3 orienté par une base orthonormée $\mathcal{C} = (i, j, k)$. On souhaite déterminer la nature géométrique d'un élément $u \in O(E)$.

Dans la suite, on suppose que $u \neq \pm \text{Id}_E$.

- 1) On calcule le déterminant $\lambda = \det(u)$.
- 2) On détermine la droite vectorielle $D = E_\lambda(u)$ et on fixe un vecteur e_1 unitaire dans D .
- 3) On détermine le nombre $\theta \in \mathbb{R}$. On commence par remarquer que l'on a

$$\text{tr}(u) = \lambda + 2 \cos(\theta) \quad \Leftrightarrow \quad \cos(\theta) = \frac{\text{tr}(u) - \lambda}{2}.$$

On en déduit θ modulo 2π en utilisant que le signe du nombre $\sin(\theta)$ est le même que celui du nombre

$$\det_{\mathcal{C}}(e_1, x, u(x)) \quad \text{où } x \in E \setminus D \text{ est choisi arbitrairement.}$$

- 4) Les informations déterminées ci-dessus nous permettent de conclure en utilisant le tableau précédent.

Remarques 8

- a) Si on souhaite déterminer la base $\mathcal{B} = (e_1, e_2, e_3)$ dont le théorème assure l'existence, il suffit de considérer un vecteur e_2 orthogonal à e_1 , puis de poser $e_3 = e_1 \wedge e_2$.
- b) Justifions la formule ci-dessus donnant le signe de $\sin(\theta)$. Pour tout vecteur $x \in E \setminus D$, il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ avec $(b, c) \neq (0, 0)$ tel que

$$x = ae_1 + be_2 + ce_3$$

$$\Rightarrow f(x) = \lambda ae_1 + (b\cos(\theta) - c\sin(\theta))e_2 + (b\sin(\theta) + c\cos(\theta))e_3.$$

Remarques 8

- b) Comme $P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}}$ est une matrice de passage entre deux bases orthonormées directes, on a $\det(P_{\mathcal{B} \rightarrow \mathcal{C}}) = 1$. On en déduit le résultat souhaité en remarquant que

$$\begin{aligned} \det_{\mathcal{C}}(e_1, x, f(x)) &= \det(P_{\mathcal{C} \rightarrow \mathcal{B}}) \det_{\mathcal{B}}(e_1, x, f(x)) \\ &= \begin{vmatrix} 1 & a & \lambda a \\ 0 & b & b\cos(\theta) - c\sin(\theta) \\ 0 & c & b\sin(\theta) + c\cos(\theta) \end{vmatrix} \\ &= \underbrace{(b^2 + c^2)}_{>0} \sin(\theta). \end{aligned}$$

Exemple 8

Soit $u \in O(E)$ dont la matrice dans la base orthonormée directe $\mathcal{C} = (i, j, k)$ est

$$A = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix} \in O_3(\mathbb{R}).$$

Nous allons déterminer la nature de cette isométrie.

- 1) On vérifie que l'on a $\lambda = \det(u) = \det(A) = 1$, donc u est une isométrie directe.
- 2) On obtient par le calcul que $D = E_1(u) = \text{Ker}(\text{Id}_E - u) = \text{Vect}(i + j)$, donc on pose $e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(i + j)$.

Exemple 8

3) Si $\theta \in \mathbb{R}$ est l'angle de l'isométrie u , on a

$$\operatorname{tr}(u) = 1 + 2\cos(\theta) \Leftrightarrow \cos(\theta) = \frac{\operatorname{tr}(u) - 1}{2} = \frac{2 - 1}{2} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \theta = \pm \frac{\pi}{3} [2\pi].$$

De plus, on sait que le nombre $\sin(\theta)$ est de même signe que le nombre

$$\det_{\mathcal{C}}(e_1, j, u(j)) = \frac{1}{4\sqrt{2}} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & \sqrt{6} \end{vmatrix} = \frac{\sqrt{3}}{4} > 0,$$

donc on a $\theta = \frac{\pi}{3}$.

4) On conclut que u est la rotation d'axe D dirigé par $i + j$ et d'angle $\frac{\pi}{3}$.

Exemple 9

Soit $u \in O(E)$ dont la matrice dans la base orthonormée directe $\mathcal{C} = (i, j, k)$ est

$$A = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 7 & 4 & 4 \\ -4 & 8 & -1 \\ 4 & 1 & -8 \end{pmatrix} \in O_3(\mathbb{R}).$$

Nous allons déterminer la nature de cette isométrie.

- 1) On vérifie que l'on a $\lambda = \det(u) = \det(A) = -1$, donc u est une isométrie indirecte.
- 2) On obtient par le calcul que $D = E_{-1}(u) = \text{Ker}(-\text{Id}_E - u) = \text{Vect}(i - 4k)$, donc on pose $e_1 = \frac{1}{\sqrt{17}}(i - 4k)$.

Exemple 9

3) Si $\theta \in \mathbb{R}$ est l'angle de l'isométrie u , on a

$$\begin{aligned}\operatorname{tr}(u) = -1 + 2\cos(\theta) &\Leftrightarrow \cos(\theta) = \frac{\operatorname{tr}(u) + 1}{2} = \frac{7/9 + 1}{2} = \frac{8}{9} \\ &\Leftrightarrow \theta = \pm \operatorname{Arccos}\left(\frac{8}{9}\right) [2\pi].\end{aligned}$$

De plus, on sait que le nombre $\sin(\theta)$ est de même signe que le nombre

$$\det_{\mathcal{C}}(e_1, i, u(i)) = \frac{1}{9\sqrt{17}} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & -4 \\ -4 & 0 & 4 \end{vmatrix} = \frac{16}{9\sqrt{17}} > 0,$$

donc on a $\theta = \operatorname{Arccos}\left(\frac{8}{9}\right)$.

Exemple 9

4) On conclut que u est la composée commutative entre :

- la rotation d'axe D dirigé par $i - 4k$ et d'angle $\operatorname{Arccos}\left(\frac{8}{9}\right)$;
- la réflexion par rapport au plan $D^\perp = \operatorname{Vect}(j, 4i + k)$.

Dans cette partie, on s'intéresse à la réduction des matrices symétriques réelles.

Proposition 8

Les sous-espaces propres d'une matrice symétrique réelle sont deux à deux orthogonaux pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$.

Exemple 10

Les sous-espaces propres de la matrice symétrique réelle

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{sont} \quad E_0(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \quad \text{et} \quad E_2(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

qui sont bien orthogonaux.

Théorème spectral

Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique réelle. Il existe une matrice diagonale $D \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ et une matrice orthogonale $P \in O_n(\mathbb{R})$ telles que

$$A = PDP^{-1} = PDP^{\top}.$$

DÉMONSTRATION

ADMISE

Remarques 9

- a) Autrement dit, si A est une matrice symétrique réelle, alors :
- toutes les valeurs propres de A sont réelles ;
 - la matrice A est diagonalisable dans $\mathcal{M}_n(\mathbb{R})$;
 - on peut choisir la matrice de passage dans $O_n(\mathbb{R})$.
- b) Dans ce contexte, on dit que A est orthogonalement diagonalisable.

ATTENTION

Si la matrice A est symétrique avec des coefficients non réels, alors elle n'est pas nécessairement diagonalisable. Par exemple, la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & -1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbb{C})$$

est symétrique, mais elle n'est pas diagonalisable.

On considère une matrice symétrique réelle $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ que l'on souhaite diagonaliser de sorte que la matrice de passage P soit orthogonal.

- 1) On détermine les valeurs propres et les sous-espaces propres de la matrice A .
- 2) On construit des bases orthonormées de chacun des sous-espaces propres (en utilisant, par exemple, l'algorithme de Gram-Schmidt).
- 3) La matrice P est la matrice dont les colonnes sont les vecteurs des bases orthonormées trouvées.

Exemple 11

Nous allons diagonaliser la matrice symétrique réelle ci-dessous avec une matrice de passage orthogonale.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{S}_3(\mathbb{R}).$$

Par un calcul direct, on obtient que le polynôme caractéristique de la matrice A est $\chi_A(\lambda) = (\lambda + 3)(\lambda - 3)^2$, donc on a $\text{Sp}(A) = \{-3, 3\}$. Les sous-espaces propres de la matrice A sont

$$E_3(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right) \quad \text{et} \quad E_{-3}(A) = \text{Vect} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right).$$

Exemple 11

En appliquant l'algorithme de Gram-Schmidt à la base de $E_3(A)$ ci-dessus, on en déduit qu'une base orthonormée du sous-espace propre $E_3(A)$ est

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right).$$

En normalisant le vecteur dans la base de $E_{-3}(A)$ ci-dessus, on obtient une base orthonormée de $E_{-3}(A)$ avec le vecteur

$$\frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Exemple 11

On a donc $A = PDP^{-1}$ avec

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad P = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & -2 & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

De plus, la matrice P est une matrice de passage entre deux bases orthonormées, donc on a $P \in O_3(\mathbb{R})$ et

$$P^{-1} = P^T = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{3} & -\sqrt{3} & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$