TD 13 Isométries d'un espace euclidien

Partie I Matrices orthogonales

Exercice 1 : Soit $(a,b,c,d,e)\in\mathbb{R}^5$. On considère la matrice

$$M=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}\sqrt{3} & \sqrt{2} & c\\ a & \sqrt{2} & d\\ \sqrt{3} & b & e\end{pmatrix}\in\mathscr{M}_3(\mathbb{R}).$$

1. Déterminer les éléments $(a,b,c,d,e)\in\mathbb{R}^5$ tels que $M\in\mathrm{O}_3(\mathbb{R})$.
2. Déterminer les éléments $(a,b,c,d,e)\in\mathbb{R}^5$ tels que $M\in\mathrm{SO}_3(\mathbb{R})$.

Exercice 2 : Soit $n\in\mathbb{N}^*$.

1. Déterminer les matrices triangulaires supérieures de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.
2. Déterminer les matrices de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ dont les coefficients sont positifs.

Exercice 3 : Soit $n\in\mathbb{N}^*$. On définit l'application

$$\varphi:\mathscr{A}_n(\mathbb{R})\to\mathscr{M}_n(\mathbb{R}),\quad A\mapsto(\mathrm{I}_n-A)(\mathrm{I}_n+A)^{-1}.$$

1. Montrer que φ est bien définie.
2. Montrer que φ réalise une bijection de $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ sur $\{M\in\mathrm{O}_n(\mathbb{R})\mid -1\notin\mathrm{Sp}(M)\}$.

Partie II Isométries vectorielles

Exercice 4 : Déterminer la matrice dans la base canonique de la réflexion de l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ par rapport au plan H d'équation $x-2y+z=0$.

Exercice 5 : Déterminer la matrice dans la base canonique de la symétrie orthogonale de l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ par rapport à la droite D dirigé par $(1,-2,2)$.

Exercice 6 : On considère $E=\mathbb{R}_2[X]$ muni du produit scalaire défini par

$$\forall(P,Q)\in E^2,\quad (P\mid Q)=\int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t.$$

On définit l'application $\varphi:E\to E$ par $\varphi(P)=P(1-X)$ pour tout $P\in E$.

1. Montrer que $\varphi\in\mathrm{O}(E)$.
2. Montrer que φ est une symétrie et déterminer ses caractéristiques.
3. Calculer le déterminant de φ.

Exercice 7 : Soit E un espace euclidien et soit $u\in\mathrm{O}(E)$.

1. Montrer que $\mathrm{Sp}(u)\subset\{-1,1\}$.
2. Montrer que si u est diagonalisable, alors u est une symétrie orthogonale.

Exercice 8 : Soient un espace euclidien E, un vecteur unitaire $a\in E$ et $\alpha\in\mathbb{R}$. On considère l'endomorphisme $f_\alpha:E\to E$ définie par

$$\forall x\in E,\quad f_\alpha(x)=x+\alpha(x\mid a)\cdot a.$$

1. Déterminer les éléments propres de f_α.
2. Pour quelles valeurs de $\alpha\in\mathbb{R}$ l'endomorphisme f_α est-il une isométrie ?
3. Déterminer la nature géométrique de f_α dans ces cas.

Exercice 9 : Soient E un espace euclidien et $u\in\mathrm{O}(E)$. Montrer que $\mathrm{Ker}(u-\mathrm{Id}_E)$ et $\mathrm{Im}(u-\mathrm{Id}_E)$ sont des supplémentaires orthogonaux.

Partie III Classification des isométries vectorielles

Exercice 10 : Soit E un plan euclidien.

1. Que peut-on dire de la composée de deux réflexions de E ?
2. Que peut-on dire de la composée d'une rotation et d'une réflexion de E ?
3. Montrer que toute rotation de E peut s'écrire comme la composée de deux réflexions de E.

Exercice 11 : Soit E un espace vectoriel euclidien orienté muni d'une base orthonormée directe $\mathscr{B} = (i, j)$. Étudier l'endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$ dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est

$$(i)\ \frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix},\quad (ii)\ \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ \sqrt{3} & -1 \end{pmatrix},\quad (iii)\ \frac{1}{5}\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix},\quad (iv)\ \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 5 & 12 \\ -12 & 5 \end{pmatrix}.$$

Exercice 12 : Déterminer une matrice $M \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ telle que

$$M^3 = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}).$$

Exercice 13 : Soit E un espace vectoriel euclidien orienté muni d'une base orthonormée directe $\mathscr{B} = (i, j, k)$. Dans chacun des cas suivants, montrer que l'endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$ dont la matrice dans la base $\mathscr{B}$ est donnée ci-dessous est une isométrie et déterminer leur nature géométrique.

$$(i)\ \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix},\quad (ii)\ \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ \sqrt{6} & -\sqrt{6} & -2 \end{pmatrix},\quad (iii)\ \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 7 & 4 & 4 \\ 4 & -8 & 1 \\ -4 & -1 & 8 \end{pmatrix},$$

$$(iv)\ \frac{1}{9}\begin{pmatrix} -8 & 4 & 1 \\ 4 & 7 & 4 \\ 1 & 4 & -8 \end{pmatrix},\quad (v)\ \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -\sqrt{2} \\ 1 & \sqrt{2} & 1 \end{pmatrix},\quad (vi)\ \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -2 \\ 2 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 14 : Soit $(a, b) \in \mathbb{R}^2$. On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} a & b & b \\ b & a & b \\ b & b & a \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_3(\mathbb{R}).$$

1. Déterminer les couples $(a, b) \in \mathbb{R}^2$ tels que $A \in O_3(\mathbb{R})$.
2. Étudier l'endomorphisme $u \in \mathscr{L}(\mathbb{R}^3)$ dont la matrice dans la base canonique est A pour chacun des couples trouvés.

Exercice 15 : On note $\mathscr{B} = (i, j, k)$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Déterminer la matrice dans la base $\mathscr{B}$ de la rotation de $\mathbb{R}^3$ d'axe dirigé par le vecteur $i - 2j$ et d'angle $\pi/3$.
2. Déterminer la matrice dans la base $\mathscr{B}$ de la rotation de $\mathbb{R}^3$ d'axe dirigé par le vecteur $i + j + k$ et d'angle $\pi/4$.

Exercice 16 : Soit E un espace euclidien orienté de dimension 3.

1. Si $u \in E$ est unitaire et $\theta \in \mathbb{R}$, montrer que l'application $f : E \to E$ définie par
$$\forall x \in E, \quad f(x) = \cos(\theta)x + \sin(\theta)(u \wedge x) + (1 - \cos(\theta))(u \mid x)u.$$
est la rotation d'axe dirigé par u et d'angle $\theta \in \mathbb{R}$.
2. Soit $\mathscr{B} = (i, j, k)$ une base orthonormée directe de E. Déterminer la matrice dans la base $\mathscr{B}$ de la rotation d'axe dirigé par $i + j + k$ et d'angle $\pi/3$.

Exercice 17 : Soit E un espace vectoriel euclidien orienté muni d'une base orthonormée directe $\mathscr{B} = (i, j, k)$. Déterminer les rotations u de E vérifiant

$$u(i) = -j \quad \text{et} \quad u(i - j + k) = i - j + k.$$

Partie IV Réduction des matrices symétriques réelles

Exercice 18 : Diagonaliser les matrices symétriques réelles suivantes avec une matrice de passage orthogonale.

$$(i)\ \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \qquad (ii)\ \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad (iii)\ \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 19 : On considère une matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ vérifiant $MM^\top M = \mathrm{I}_n$.

1. Montrer que M est une matrice symétrique.
2. En déduire que $M = \mathrm{I}_n$.

Exercice 20 : Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont on note les coefficients $(m_{i,j})_{1\leqslant i,j\leqslant n}$.

1. Montrer que
$$\mathrm{tr}\left(MM^\top\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_{i,j}^2.$$
2. On suppose que M est symétrique et on note $\lambda_1,\dots,\lambda_n \in \mathbb{R}$ ses valeurs propres. Montrer que
$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} m_{i,j}^2 = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i^2.$$

Exercice 21 : Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice nilpotente telle que $M^\top M = MM^\top$.

1. Déterminer les matrices nilpotentes de $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$.
2. En déduire que $M^\top M = 0$, puis que $M = 0$.

Exercice 22 : On considère une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et on note $M = A^\top A - AA^\top$.

1. Montrer que M est diagonalisable et calculer $\mathrm{tr}(M)$.
2. Montrer que les matrices A et $A^\top$ commutent si et seulement si $\mathrm{Sp}(M) \subset \mathbb{R}_+$.

Exercice 23 : Soit $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique. On note $\lambda_1,\dots,\lambda_n \in \mathbb{R}$ les valeurs propres de M et on suppose que $0 \leqslant \lambda_1 \leqslant \cdots \leqslant \lambda_n$.

1. Justifier qu'il existe une matrice $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ telle que $M = PDP^{-1}$ avec
$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & (0) \\ & \ddots & \\ (0) & & \lambda_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}).$$
2. On note $Y = P^{-1}X$ où $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$. Montrer que $X^\top X = Y^\top Y$.
3. Montrer que pour tout $X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, on a
$$\lambda_1(X^\top X) \leqslant X^\top AX \leqslant \lambda_n(X^\top X).$$

Exercice 24 : Soit $A \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ avec $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes.

(i) $\mathrm{Sp}(A) \subset \mathbb{R}_+$. $\qquad (ii)$ $\forall X \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}), \quad X^\top AX \geqslant 0$.

(iii) $\exists B \in \mathscr{S}_n(\mathbb{R}), \quad A = B^2$. $\qquad (iv)$ $\exists M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}), \quad A = MM^\top$.

Exercice 25 - Décomposition polaire : On désigne par $\mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices de $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ dont toutes les valeurs propres sont strictement positives.
On considère une matrice inversible $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer que $A = MM^\top \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$.
2. Montrer qu'il existe une unique matrice $S \in \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ telle que $A = S^2$.
3. En déduire qu'il existe un unique couple de matrices $(O,S) \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R}) \times \mathscr{S}_n^{++}(\mathbb{R})$ tel que $M = OS$.