Mathématiques

PT

Lycée Couffignal

CHAPITRE 13

Isométries d'un espace euclidien

Plan du chapitre

Introduction

Ce chapitre est le prolongement du chapitre sur les espaces préhilbertiens. Nous allons étudier les endomorphismes d'un espace euclidien préservant la norme des vecteurs : les isométries. Nous nous intéresserons notamment à leur classification en petite dimension. Finalement, nous verrons un résultat important sur la réduction des matrices symétriques réelles.

Les isométries en dimension 2 et 3 sont souvent utilisées en science pour passer des coordonnées dans un repère orthonormé à celles dans un autre repère orthonormé.

Dans tout le chapitre, on considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et un espace vectoriel euclidien E de dimension n.

Partie I Matrices orthogonales

I.A - Généralités

Définition (Matrice orthogonale) : On dit qu'une matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est orthogonale si elle vérifie $M^\top M = \mathrm{I}_n$.

Remarques 1 :

a) Une matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est orthogonale si et seulement si ses vecteurs colonnes forment une base orthonormée de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$.

b) Une matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est orthogonale si et seulement si ses vecteurs lignes forment une base orthonormée de l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$.

c) Une matrice $M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ est orthogonale si et seulement si elle est inversible et vérifie $M^{-1} = M^\top$.

Définition (Groupe orthogonal d'ordre n) : Le groupe orthogonal d'ordre n est l'ensemble des matrices orthogonales de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. On le note $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ ou $\mathrm{O}(n)$.

Exemple 1 : Les deux matrices ci-dessous sont orthogonales.

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix} \in \mathrm{O}_2(\mathbb{R}), \qquad \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R}).$$

Théorème 1 : L'ensemble $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ est un groupe, i.e. il vérifie les trois propriétés suivantes.

(i) La matrice I_n appartient à $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.

(ii) Pour tout $M \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, la matrice M est inversible et on a $M^{-1} \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.

(iii) Pour tout $(M, N) \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})^2$, on a $MN \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.

Proposition 1 : Soit $\mathscr{B}$ une base orthonormée de E. Une base $\mathscr{C}$ de E est orthonormée si et seulement si la matrice de passage $P_{\mathscr{B}\to\mathscr{C}}$ est orthogonale.

I.B - Déterminant d'une matrice orthogonale

Proposition 2 : Si $M \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$, alors on a $\det(M) = \pm 1$.

Définition (Groupe spécial orthogonal d'ordre n) : Le groupe spécial orthogonal d'ordre n est l'ensemble des matrices orthogonales de $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ dont le déterminant est égal à 1. On le note $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ ou $\mathrm{SO}(n)$.

Exemple 2 : Les deux matrices ci-dessous sont orthogonales, mais seule la seconde est dans le groupe spécial orthogonal.

$$\frac{1}{2}\begin{pmatrix} \sqrt{2} & -\sqrt{2} & 0 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{pmatrix} \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R}) \setminus \mathrm{SO}_3(\mathbb{R}), \qquad \frac{1}{3}\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & -2 & 2 \\ 2 & -1 & -2 \end{pmatrix} \in \mathrm{SO}_3(\mathbb{R}).$$

Théorème 2 : L'ensemble $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$ est un groupe, i.e. il vérifie les trois propriétés suivantes.

(i) La matrice I_n appartient à $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$.

(ii) Pour tout $M \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$, la matrice M est inversible et on a $M^{-1} \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$.

(iii) Pour tout $(M, N) \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})^2$, on a $MN \in \mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$.

I.C - Orientation de l'espace euclidien

Si $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ sont deux bases orthonormées de l'espace euclidien E, alors la matrice de passage $P_{\mathscr{B}\to\mathscr{C}}$ est orthogonale d'après les résultats précédents, donc son déterminant est égal à ± 1.

Définition (Espace euclidien orienté) : Un espace euclidien orienté est un espace euclidien dans lequel on a choisi une base orthonormée $\mathscr{C}$ de E.

Définition (Base directe et indirecte) : Soit E un espace euclidien orienté par une base orthonormée $\mathscr{C}$. Une base orthonormée $\mathscr{B}$ de E est dite

(i) directe si la matrice de passage de $\mathscr{C}$ à $\mathscr{B}$ est de déterminant 1 ;

(ii) indirecte si la matrice de passage de $\mathscr{C}$ à $\mathscr{B}$ est de déterminant -1.

Remarques 2 :

a) On dit que deux bases orthonormées $\mathscr{B}$ et $\mathscr{C}$ de l'espace euclidien E définissent la même orientation si le déterminant de la matrice de passage $P_{\mathscr{B}\to\mathscr{C}}$ est égal à 1. Dans ce cas, le choix de $\mathscr{B}$ ou de $\mathscr{C}$ pour orienter E induit les mêmes bases directes et les mêmes bases indirectes.

b) On en déduit qu'il y a deux orientations possibles pour un espace euclidien.

Exemple 3 : Si l'espace $\mathbb{R}^3$ est orienté par la base canonique (i, j, k), alors les bases (i, j, k), (j, k, i) et (k, i, j) sont directes, tandis que les bases (i, k, j), (k, j, i) et (j, i, k) sont indirectes.

Partie II Isométries vectorielles

II.A - Généralités

Définition (Isométrie vectorielle) : Un endomorphisme $\varphi \in \mathscr{L}(E)$ est une isométrie vectorielle (ou un automorphisme orthogonal) si φ conserve la norme des vecteurs, i.e.

$$\forall x \in E, \quad \|\varphi(x)\| = \|x\|.$$

Exemple 4 : Les applications $\pm \mathrm{Id}_E \in \mathscr{L}(E)$ sont des isométries vectorielles.

Définition (Groupe orthogonal d'un espace euclidien) : Le groupe orthogonal de l'espace euclidien E est l'ensemble des isométries vectorielles de E. On le note $\mathrm{O}(E)$.

Théorème 3 : L'ensemble $\mathrm{O}(E)$ est un groupe, i.e. il vérifie les trois propriétés suivantes.

(i) L'endomorphisme Id_E appartient à $\mathrm{O}(E)$.

(ii) Pour tout $u \in \mathrm{O}(E)$, l'endomorphisme u est un isomorphisme et $u^{-1} \in \mathrm{O}(E)$.

(iii) Pour tout $(u, v) \in \mathrm{O}(E)^2$, on a $u \circ v \in \mathrm{O}(E)$.

Théorème de caractérisation des isométries : Soit $\varphi \in \mathscr{L}(E)$. Les assertions suivantes sont équivalentes.

(i) L'application φ est une isométrie vectorielle.

(ii) L'application φ conserve le produit scalaire, i.e.

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad (\varphi(x) \mid \varphi(y)) = (x \mid y).$$

(iii) L'image de toute base orthonormée de E par φ est une base orthonormée de E.

(iv) L'image d'une base orthonormée de E par φ est une base orthonormée de E.

Proposition (Caractérisation matricielle des isométries) : Soit $\mathscr{B}$ une base orthonormée de E. Un endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$ est une isométrie vectorielle si et seulement si la matrice $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u)$ est orthogonale.

Remarque 3 : Autrement dit, une fois que l'on a fixé une base orthonormée de E, les éléments de $\mathrm{O}(E)$ correspondent bijectivement via leur matrice aux éléments de $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.

Proposition 3 : Si un sous-espace vectoriel F de E est stable par une isométrie vectorielle $u \in \mathscr{L}(E)$, alors le sous-espace vectoriel $F^\perp$ est stable par u.

II.B - Isométries vectorielles directes et indirectes

Proposition 4 : Si $u \in \mathrm{O}(E)$, alors on a $\det(u) = \pm 1$.

Définition (Isométrie vectorielle directe / indirecte) : Une isométrie vectorielle $u \in \mathrm{O}(E)$ est dite directe si elle vérifie $\det(u) = 1$. Dans le cas contraire, on dit qu'elle est indirecte.

Définition (Groupe spécial orthogonal d'un espace euclidien) : Le groupe spécial orthogonal de l'espace euclidien E est l'ensemble des isométries vectorielles directes de E. On le note $\mathrm{SO}(E)$.

Remarque 4 : D'après les résultats précédents, une fois que l'on a fixé une base orthonormée de E, les éléments de $\mathrm{SO}(E)$ correspondent bijectivement via leur matrice aux éléments de $\mathrm{SO}_n(\mathbb{R})$.

Théorème 4 : L'ensemble $\mathrm{SO}(E)$ est un groupe, i.e. il vérifie les trois propriétés suivantes.

(i) L'endomorphisme Id_E appartient à $\mathrm{SO}(E)$.

(ii) Pour tout $u \in \mathrm{SO}(E)$, l'endomorphisme u est un isomorphisme et $u^{-1} \in \mathrm{SO}(E)$.

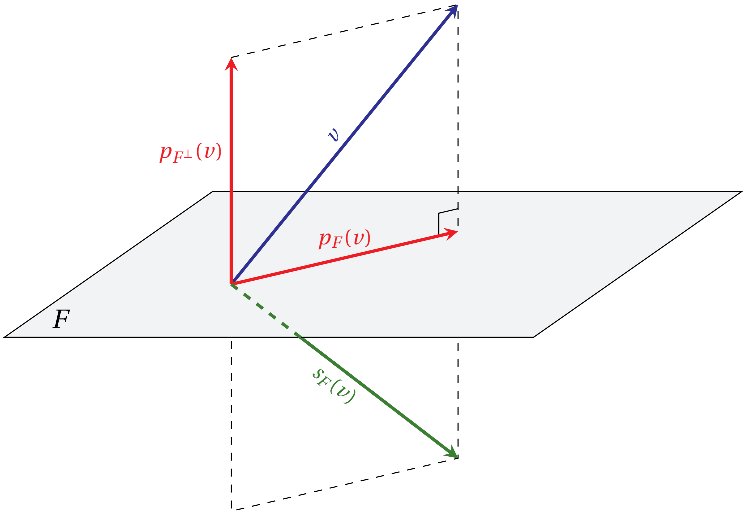
(iii) Pour tout $(u, v) \in \mathrm{SO}(E)^2$, on a $u \circ v \in \mathrm{SO}(E)$.

II.C - Les symétries orthogonales

Définition (Symétrie orthogonale) : Soit F un sous-espace vectoriel de E. La symétrie orthogonale par rapport à F est la symétrie $s_F : E \to E$ par rapport à F et parallèlement à $F^\perp$.

Remarque 5 : On a $s_F = p_F - p_{F^\perp} = 2p_F - \mathrm{Id}_E$.

Illustration : La figure suivante représente géométriquement la symétrie orthogonale par rapport à F.



Exemple 5 : Dans le chapitre sur les espaces préhilbertiens, on a vu que la projection orthogonale sur le plan vectoriel $H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$ dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^3$ est donnée par

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad p_H(x, y, z) = \left(\frac{2x - y - z}{3}, \frac{-x + 2y - z}{3}, \frac{-x - y + 2z}{3}\right).$$

On en déduit avec la relation $s_H = 2p_H - \mathrm{Id}_{\mathbb{R}^3}$ que l'on a

$$\forall (x, y, z) \in \mathbb{R}^3, \quad s_H(x, y, z) = \left(\frac{x - 2y - 2z}{3}, \frac{-2x + y - 2z}{3}, \frac{-2x - 2y + z}{3}\right).$$

Proposition 5 : Les symétries orthogonales sont des isométries vectorielles.

Définition (Réflexion) : Une réflexion est une symétrie orthogonale par rapport à un hyperplan.

Partie III Classification des isométries vectorielles en petite dimension

III.A - Isométries vectorielles d'un plan euclidien

Dans cette partie, on étudie les isométries d'un plan euclidien E orienté par une base orthonormée $\mathscr{C} = (i, j)$.

Proposition 6 : Soit $u \in \mathrm{O}(E)$ une isométrie d'un plan vectoriel euclidien orienté.

(i) Si u est directe, alors il existe un réel $\theta \in \mathbb{R}$ tel que pour toute base orthonormée directe $\mathscr{B}$ de E, on a

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

(ii) Si u est indirecte, alors pour toute base orthonormée directe $\mathscr{B}$ de E, il existe un réel $\theta \in \mathbb{R}$ tel que

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Remarques 6 :

a) En particulier, on vérifie dans la démonstration que

$$\mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \;\middle|\; \theta \in \mathbb{R} \right\}, \qquad \mathrm{O}_2(\mathbb{R}) \setminus \mathrm{SO}_2(\mathbb{R}) = \left\{ \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}) \;\middle|\; \theta \in \mathbb{R} \right\}.$$

b) Si on change l'orientation du plan choisi au début, le réel θ est remplacé par son opposé dans les deux propositions précédentes.

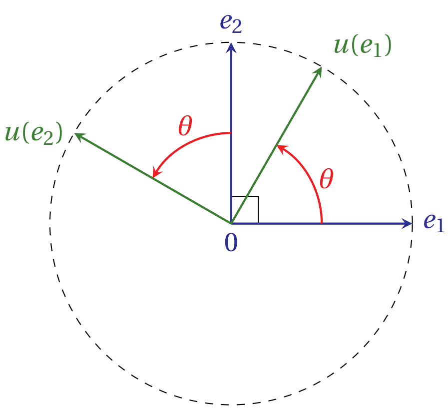
Illustration : Interprétons le résultat du théorème précédent.

Isométrie directe

Si u est une isométrie directe, alors pour tout base orthonormée directe $\mathscr{B} = (e_1, e_2)$ de E, on a

$$\begin{cases} u(e_1) = \cos(\theta) e_1 + \sin(\theta) e_2 \\ u(e_2) = -\sin(\theta) e_1 + \cos(\theta) e_2. \end{cases}$$

Ces relations se reproduisent géométriquement.



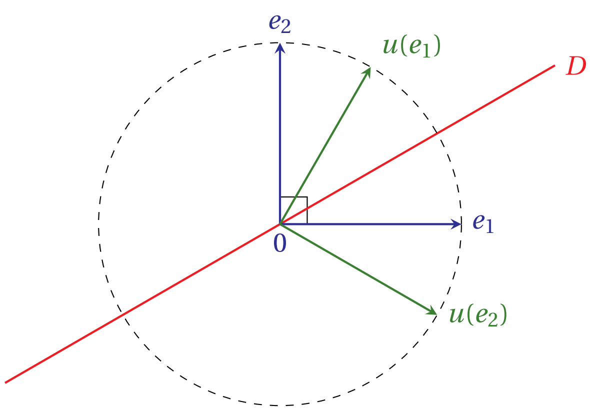
On conclut qu'une isométrie directe du plan est une rotation d'angle θ.

Isométrie indirecte

Si u est une isométrie indirecte, alors il existe une base orthonormée directe $\mathscr{B} = (e_1, e_2)$ de E telle que

$$\begin{cases} u(e_1) = \cos(\theta) e_1 + \sin(\theta) e_2 \\ u(e_2) = \sin(\theta) e_1 - \cos(\theta) e_2. \end{cases}$$

Ces relations se reproduisent géométriquement.



On conclut qu'une isométrie indirecte du plan est une réflexion par rapport à une droite vectorielle D.

Bilan : Le tableau suivant résume la situation pour une isométrie $u \in \mathrm{O}(E)$ d'un plan euclidien orienté.

Type	Nature	Valeurs propres réelles	Compléments
Directe	$u = \mathrm{Id}_E$ est la rotation d'angle $\theta = 0\ [2\pi]$	$\mathrm{Sp}(u) = \{1\}$	$E_1(u) = E$
	$u = -\mathrm{Id}_E$ est la rotation d'angle $\theta = \pi\ [2\pi]$	$\mathrm{Sp}(u) = \{-1\}$	$E_{-1}(u) = E$
	u est la rotation d'angle $\theta \neq 0\ [\pi]$	$\mathrm{Sp}(u) = \varnothing$	Les valeurs propres complexes sont $\mathrm{e}^{\pm i\theta}$.
Indirecte	u est la réflexion par rapport à D	$\mathrm{Sp}(u) = \{\pm 1\}$	$E_1(u) = D$ $E_{-1}(u) = D^{\perp}$

Exemple 6 : Déterminons la nature de l'endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$ défini par

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(u) = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}).$$

En notant $M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(u)$, on remarque que la matrice M est orthogonale et que $\det(M) = 1$. On en déduit que u est une isométrie directe du plan euclidien E, donc il s'agit d'une rotation d'après les résultats précédents. Finalement, on constate que

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(u) = \begin{pmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) & -\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) \\ \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) & \cos\left(\frac{\pi}{3}\right) \end{pmatrix},$$

donc u est la rotation du plan euclidien orienté E d'angle $\frac{\pi}{3}$.

Exemple 7 : Déterminons la nature de l'endomorphisme $u \in \mathscr{L}(E)$ défini par

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(u) = \frac{1}{5}\begin{pmatrix} -3 & 4 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}).$$

En notant $M = \mathrm{Mat}_{\mathscr{C}}(u)$, on remarque que la matrice M est orthogonale et que $\det(M) = -1$. On en déduit que u est une isométrie indirecte du plan euclidien E, donc il s'agit d'une réflexion d'après les résultats précédents. De plus, on constate que

$$E_1(M) = \mathrm{Ker}(\mathrm{I}_2 - M) = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{2,1}(\mathbb{R}) \;\middle|\; y = 2x \right\} = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right).$$

donc u est la réflexion par rapport à $D = \mathrm{Vect}(i + 2j)$.

Remarque 7 : L'étude de cette partie nous permet de définir rigoureusement la mesure d'un angle orienté de vecteurs dans un plan euclidien orienté. Si a et b sont deux vecteurs non nuls du plan euclidien orienté E, alors on peut vérifier qu'il existe une unique rotation $r_{a,b} \in \mathrm{SO}(E)$ telle que

$$r_{a,b}\left(\frac{a}{\|a\|}\right) = \left(\frac{b}{\|b\|}\right).$$

La mesure de l'angle orienté (a, b) est défini comme l'unique réel θ modulo 2π tel que

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(r_{a,b}) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$

où $\mathscr{B}$ est une base orthonormée directe du plan orienté E.

III.B - Isométries vectorielles en dimension 3

Dans cette partie, on étudie les isométries d'un espace euclidien E de dimension 3 orienté par une base orthonormée $\mathscr{C} = (i, j, k)$.

Proposition 7 : Soit $u \in \mathrm{O}(E)$ une isométrie d'un espace euclidien orienté E de dimension 3.

(i) Si u est directe, alors il existe un réel $\theta \in \mathbb{R}$ et une base orthonormée directe $\mathscr{B}$ de E tels que

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

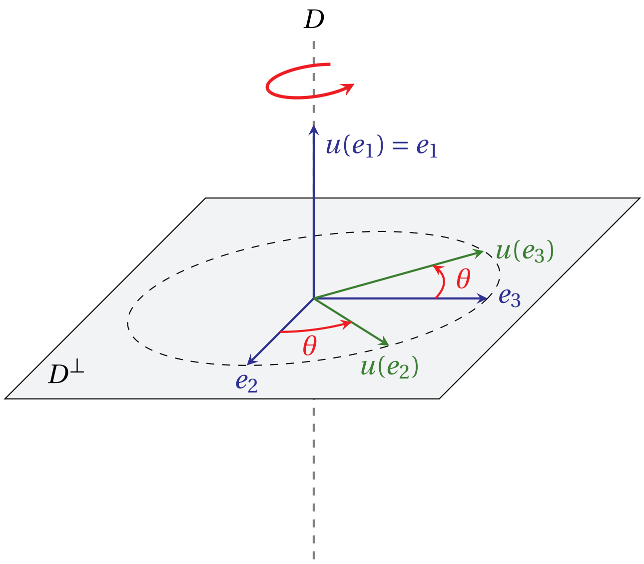
(ii) Si u est indirecte, alors il existe un réel $\theta \in \mathbb{R}$ et une base orthonormée directe $\mathscr{B}$ de E tels que

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(u) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ 0 & \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}.$$

Illustration : Interprétons le résultat du théorème précédent.

Isométrie directe

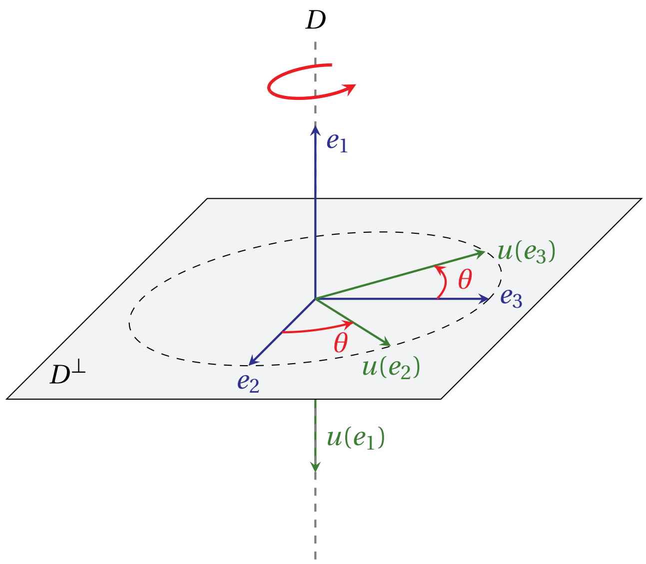
En notant $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base du théorème et en considérant la matrice, on a la figure suivante.



On en déduit que u est la rotation d'axe D dirigé par le vecteur e_1 et d'angle θ.

Isométrie indirecte

En notant $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ la base du théorème et en considérant la matrice, on a la figure suivante.



On en déduit que l'isométrie u est la composée commutative entre :

- la rotation d'axe D dirigé par e_1 et d'angle θ ;
- la réflexion par rapport au plan $D^\perp = \mathrm{Vect}(e_2, e_3)$.

Bilan : Le tableau suivant résume la situation pour une isométrie $u \in \mathrm{O}(E)$ où E est un espace euclidien orienté de dimension 3.

Type	**Nature**	**Valeurs propres réelles**	**Compléments**
Directe	$u = \mathrm{Id}_E$	$\mathrm{Sp}(u) = \{1\}$	$E_1(u) = E$
	u est la symétrie orthogonale par rapport à une droite D (rotation d'angle $\theta = \pi\ [2\pi]$)	$\mathrm{Sp}(u) = \{1, -1\}$	$E_1(u) = D$ $E_{-1}(u) = D^{\perp}$
	u est la rotation d'axe D et d'angle $\theta \neq 0\ [\pi]$	$\mathrm{Sp}(u) = \{1\}$	$E_1(u) = D$
Indirecte	$u = -\mathrm{Id}_E$	$\mathrm{Sp}(u) = \{-1\}$	$E_{-1}(u) = E$
	u est la réflexion par rapport au plan $D^{\perp}$ (isométrie indirecte d'angle $\theta = 0\ [\pi]$)	$\mathrm{Sp}(u) = \{1, -1\}$	$E_1(u) = D^{\perp}$ $E_{-1}(u) = D$
	u est l'isométrie indirecte d'axe D et d'angle $\theta \neq 0\ [\pi]$	$\mathrm{Sp}(u) = \{-1\}$	$E_{-1}(u) = D$

III.C - Méthode - Étudier une isométrie vectorielle en dimension 3

Dans cette partie, on suppose que E est un espace euclidien de dimension 3 orienté par une base orthonormée $\mathscr{C} = (i, j, k)$. On souhaite déterminer la nature géométrique d'un élément $u \in \mathrm{O}(E)$.
Dans la suite, on suppose que $u \neq \pm\mathrm{Id}_E$.

1) On calcule le déterminant $\lambda = \det(u)$.
2) On détermine la droite vectorielle $D = E_\lambda(u)$ et on fixe un vecteur e_1 unitaire dans D.
3) On détermine le nombre $\theta \in \mathbb{R}$. On commence par remarquer que l'on a

$$\mathrm{tr}(u) = \lambda + 2\cos(\theta) \quad \Leftrightarrow \quad \cos(\theta) = \frac{\mathrm{tr}(u) - \lambda}{2}.$$

On en déduit θ modulo 2π en utilisant que le signe du nombre $\sin(\theta)$ est le même que celui du nombre

$$\det_{\mathscr{C}}(e_1, x, u(x)) \quad \text{où} \quad x \in E \setminus D \quad \text{est choisi arbitrairement.}$$

4) Les informations déterminées ci-dessus nous permettent de conclure en utilisant le tableau précédent.

Remarques 8 :

a) Si on souhaite déterminer la base $\mathscr{B} = (e_1, e_2, e_3)$ dont le théorème assure l'existence, il suffit de considérer un vecteur e_2 orthogonal à e_1, puis de poser $e_3 = e_1 \wedge e_2$.

b) Justifions la formule ci-dessus donnant le signe de $\sin(\theta)$. Pour tout vecteur $x \in E \setminus D$, il existe $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ avec $(b, c) \neq (0, 0)$ tel que

$$x = ae_1 + be_2 + ce_3 \quad \Rightarrow \quad f(x) = \lambda a e_1 + (b\cos(\theta) - c\sin(\theta))e_2 + (b\sin(\theta) + c\cos(\theta))e_3.$$

Comme $P_{\mathscr{B}\to\mathscr{C}}$ est une matrice de passage entre deux bases orthonormées directes, on a $\det(P_{\mathscr{B}\to\mathscr{C}}) = 1$. On en déduit le résultat souhaité en remarquant que

$$\det_{\mathscr{C}}(e_1, x, f(x)) = \det(P_{\mathscr{C}\to\mathscr{B}})\det_{\mathscr{B}}(e_1, x, f(x)) = \begin{vmatrix} 1 & a & \lambda a \\ 0 & b & b\cos(\theta) - c\sin(\theta) \\ 0 & c & b\sin(\theta) + c\cos(\theta) \end{vmatrix} = \underbrace{(b^2 + c^2)}_{>0}\sin(\theta).$$

Exemple 8 : Soit $u \in \mathrm{O}(E)$ dont la matrice dans la base orthonormée directe $\mathscr{C} = (i, j, k)$ est

$$A = \frac{1}{4}\begin{pmatrix} 3 & 1 & \sqrt{6} \\ 1 & 3 & -\sqrt{6} \\ -\sqrt{6} & \sqrt{6} & 2 \end{pmatrix} \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R}).$$

Nous allons déterminer la nature de cette isométrie.

1) On vérifie que l'on a $\lambda = \det(u) = \det(A) = 1$, donc u est une isométrie directe.

2) On obtient par le calcul que $D = E_1(u) = \mathrm{Ker}(\mathrm{Id}_E - u) = \mathrm{Vect}(i + j)$, donc on pose $e_1 = \dfrac{1}{\sqrt{2}}(i + j)$.

3) Si $\theta \in \mathbb{R}$ est l'angle de l'isométrie u, on a

$$\mathrm{tr}(u) = 1 + 2\cos(\theta) \quad \Leftrightarrow \quad \cos(\theta) = \frac{\mathrm{tr}(u) - 1}{2} = \frac{2-1}{2} = \frac{1}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \theta = \pm\frac{\pi}{3}\ [2\pi].$$

De plus, on sait que le nombre $\sin(\theta)$ est de même signe que le nombre

$$\det_{\mathscr{C}}(e_1, j, u(j)) = \frac{1}{4\sqrt{2}}\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & \sqrt{6} \end{vmatrix} = \frac{\sqrt{3}}{4} > 0,$$

donc on a $\theta = \dfrac{\pi}{3}$.

4) On conclut que u est la rotation d'axe D dirigé par $i + j$ et d'angle $\dfrac{\pi}{3}$.

Exemple 9 : Soit $u \in \mathrm{O}(E)$ dont la matrice dans la base orthonormée directe $\mathscr{C} = (i, j, k)$ est

$$A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 7 & 4 & 4 \\ -4 & 8 & -1 \\ 4 & 1 & -8 \end{pmatrix} \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R}).$$

Nous allons déterminer la nature de cette isométrie.

1) On vérifie que l'on a $\lambda = \det(u) = \det(A) = -1$, donc u est une isométrie indirecte.

2) On obtient par le calcul que $D = E_{-1}(u) = \mathrm{Ker}(-\mathrm{Id}_E - u) = \mathrm{Vect}(i - 4k)$, donc on pose $e_1 = \dfrac{1}{\sqrt{17}}(i - 4k)$.

3) Si $\theta \in \mathbb{R}$ est l'angle de l'isométrie u, on a

$$\mathrm{tr}(u) = -1 + 2\cos(\theta) \quad \Leftrightarrow \quad \cos(\theta) = \frac{\mathrm{tr}(u) + 1}{2} = \frac{7/9 + 1}{2} = \frac{8}{9} \quad \Leftrightarrow \quad \theta = \pm\mathrm{Arccos}\left(\frac{8}{9}\right)\ [2\pi].$$

De plus, on sait que le nombre $\sin(\theta)$ est de même signe que le nombre

$$\det_{\mathscr{C}}(e_1, i, u(i)) = \frac{1}{9\sqrt{17}}\begin{vmatrix} 1 & 1 & 7 \\ 0 & 0 & -4 \\ -4 & 0 & 4 \end{vmatrix} = \frac{16}{9\sqrt{17}} > 0,$$

donc on a $\theta = \mathrm{Arccos}\left(\dfrac{8}{9}\right)$.

4) On conclut que u est la composée commutative entre :

- la rotation d'axe D dirigé par $i - 4k$ et d'angle $\mathrm{Arccos}\left(\dfrac{8}{9}\right)$;
- la réflexion par rapport au plan $D^{\perp} = \mathrm{Vect}(j, 4i + k)$.

Partie IV Réduction des matrices symétriques réelles

IV.A - Le théorème spectral

Dans cette partie, on s'intéresse à la réduction des matrices symétriques réelles.

Proposition 8 : Les sous-espaces propres d'une matrice symétrique réelle sont deux à deux orthogonaux pour le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$.

Exemple 10 : Les sous-espaces propres de la matrice symétrique réelle

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{sont} \quad E_0(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}\right) \quad \text{et} \quad E_2(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

qui sont bien orthogonaux.

Théorème spectral : Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice symétrique réelle. Il existe une matrice diagonale $D \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ et une matrice orthogonale $P \in \mathrm{O}_n(\mathbb{R})$ telles que

$$A = PDP^{-1} = PDP^\top.$$

DÉMONSTRATION ADMISE

Remarques 9 :

a) Autrement dit, si A est une matrice symétrique réelle, alors :
   - toutes les valeurs propres de A sont réelles ;
   - la matrice A est diagonalisable dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$;
   - on peut choisir la matrice de passage dans $\mathrm{O}_n(\mathbb{R})$.

b) Dans ce contexte, on dit que A est orthogonalement diagonalisable.

ATTENTION : Si la matrice A est symétrique avec des coefficients non réels, alors elle n'est pas nécessairement diagonalisable. Par exemple, la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & \mathrm{i} \\ \mathrm{i} & -1 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{C})$$

est symétrique, mais elle n'est pas diagonalisable.

IV.B - Méthode - Diagonaliser une matrice symétrique réelle

On considère une matrice symétrique réelle $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ que l'on souhaite diagonaliser de sorte que la matrice de passage P soit orthogonal.

1) On détermine les valeurs propres et les sous-espaces propres de la matrice A.
2) On construit des bases orthonormées de chacun des sous-espaces propres (en utilisant, par exemple, l'algorithme de Gram-Schmidt).
3) La matrice P est la matrice dont les colonnes sont les vecteurs des bases orthonormées trouvées.

Exemple 11 : Nous allons diagonaliser la matrice symétrique réelle ci-dessous avec une matrice de passage orthogonale.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & -2 \\ -2 & -2 & 1 \end{pmatrix} \in \mathscr{S}_3(\mathbb{R}).$$

Par un calcul direct, on obtient que le polynôme caractéristique de la matrice A est $\chi_A(\lambda) = (\lambda+3)(\lambda-3)^2$, donc on a $\mathrm{Sp}(A) = \{-3, 3\}$. Les sous-espaces propres de la matrice A sont

$$E_3(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right) \quad \text{et} \quad E_{-3}(A) = \mathrm{Vect}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right).$$

En appliquant l'algorithme de Gram-Schmidt à la base de $E_3(A)$ ci-dessus, on en déduit qu'une base orthonormée du sous-espace propre $E_3(A)$ est

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}\right).$$

En normalisant le vecteur dans la base de $E_{-3}(A)$ ci-dessus, on obtient une base orthonormée de $E_{-3}(A)$ avec le vecteur

$$\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

On a donc $A = PDP^{-1}$ avec

$$D = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}, \quad P = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ -\sqrt{3} & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & -2 & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

De plus, la matrice P est une matrice de passage entre deux bases orthonormées, donc on a $P \in \mathrm{O}_3(\mathbb{R})$ et

$$P^{-1} = P^\top = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -\sqrt{3} & 0 \\ 1 & 1 & -2 \\ \sqrt{2} & \sqrt{2} & \sqrt{2} \end{pmatrix}.$$