

CHAPITRE 4

Intégration sur un intervalle

Jérôme VON BUHREN

<http://vonbuhren.free.fr>

Lycée Couffignal - PT*

L'intégration est essentielle dans les différentes disciplines scientifiques. Elle permet par exemple de définir la transformation de Laplace et la transformation de Fourier qui sont des notions importantes en physique et en science de l'ingénieur. L'intégration joue également un rôle central en probabilité et en statistique.

L'objectif de ce chapitre est d'étendre la notion d'intégrale d'une fonction continue sur un intervalle qui n'est pas nécessairement un segment. Une première difficulté apparaît directement : l'aire sous la courbe de la fonction n'est plus nécessairement fini, ce qui nous amènera à définir la notion d'intégrale convergente.

Dans tout le chapitre, on désigne par $\mathbb{K}$ le corps $\mathbb{R}$ ou le corps $\mathbb{C}$.

Nous allons distinguer trois cas pour définir l'intégrale d'une fonction continue $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ où I est un intervalle qui n'est pas un segment (ce cas étant déjà traité en première année) :

(i) $I = [a, b[$,

(ii) $I =]a, b]$,

(iii) $I =]a, b[$.

Définition (Intégrale d'une fonction sur $[a, b[$)

Soit $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{K}$ une fonction continue avec $b \in]a, +\infty]$.

L'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ est dite convergente si la fonction $\beta \mapsto \int_a^\beta f(t) dt$ admet une limite finie lorsque $\beta \rightarrow b^-$. Dans ce cas, on note

$$\int_a^b f(t) dt = \lim_{\beta \rightarrow b^-} \int_a^\beta f(t) dt.$$

Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale est divergente.

Remarque 1

On dit aussi que l'intégrale est convergente (ou divergente) en b .

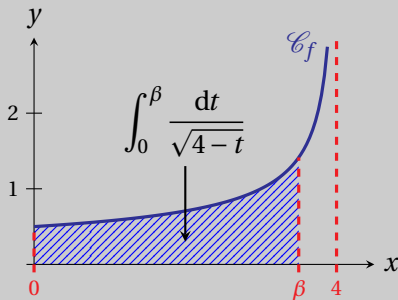
Exemples 1

- a) On considère la fonction continue $f: [0, 4[\rightarrow \mathbb{R}$
 définie par $f: t \mapsto \frac{1}{\sqrt{4-t}}$.

Pour tout $\beta \in [0, 4[$, on a

$$\int_0^\beta \frac{dt}{\sqrt{4-t}} = \left[-2\sqrt{4-t} \right]_0^\beta$$

$$\xrightarrow{\beta \rightarrow 4^-} 4.$$



On en déduit que l'intégrale $\int_0^4 f(t) dt$ est convergente
 et que sa valeur est 4.

Exemples 1

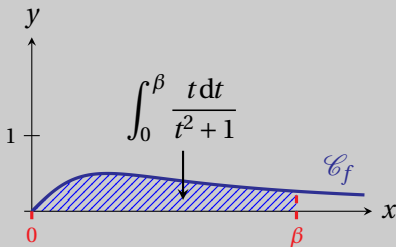
b) On considère la fonction continue $f: [0, +\infty[\rightarrow \mathbb{R}$
 définie par $f: t \mapsto \frac{t}{t^2 + 1}$.

Pour tout $\beta \in [0, +\infty[$, on a

$$\int_0^\beta \frac{t \, dt}{t^2 + 1} = \left[\frac{1}{2} \ln(t^2 + 1) \right]_0^\beta$$

$$\xrightarrow{\beta \rightarrow +\infty} +\infty,$$

donc l'intégrale $\int_0^{+\infty} f(t) \, dt$
 est divergente.



Définition (Intégrale d'une fonction sur $]a, b[$)

Soit $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{K}$ une fonction continue avec $a \in [-\infty, b[$.

L'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ est dite convergente si la fonction $\alpha \mapsto \int_\alpha^b f(t) dt$ admet une limite finie lorsque $\alpha \rightarrow a^+$. Dans ce cas, on note

$$\int_a^b f(t) dt = \lim_{\alpha \rightarrow a^+} \int_\alpha^b f(t) dt.$$

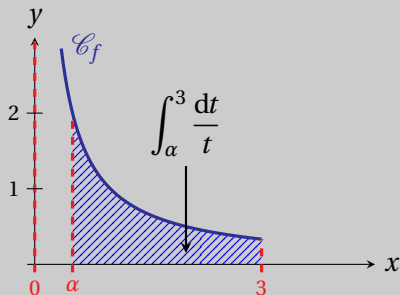
Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale est divergente.

Remarque 2

On dit aussi que l'intégrale est convergente (ou divergente) en a .

Exemple 2

On considère la fonction continue $f :]0, 3] \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f : t \mapsto \frac{1}{t}$.



Pour tout $\alpha \in]0, 3]$, on a

$$\int_{\alpha}^3 \frac{dt}{t} = [\ln(t)]_{\alpha}^3 \xrightarrow{\alpha \rightarrow 0^+} +\infty,$$

donc l'intégrale $\int_0^3 f(t) dt$ est divergente.

Définition (Intégrale d'une fonction sur $]a, b[$)

Soit $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{K}$ continue avec $-\infty \leq a \leq b \leq +\infty$.

L'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ est dite convergente s'il existe un réel $c \in]a, b[$ tel que

$$\int_a^c f(t) dt \quad \text{et} \quad \int_c^b f(t) dt$$

sont convergentes. Dans ce cas, on note

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt.$$

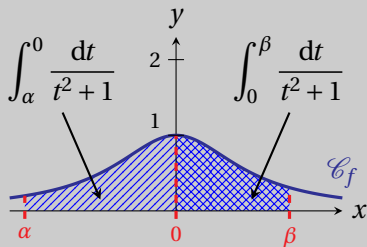
Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale est divergente.

Remarques 3

- a) La convergence ou la divergence de l'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ ne dépend pas du choix du point $c \in]a, b[$.
- b) Si l'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ est convergente, sa valeur ne dépend pas du choix du point $c \in]a, b[$.

Exemple 3

On considère la fonction continue $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f: t \mapsto \frac{1}{t^2 + 1}$.



Pour tout $\alpha < 0 < \beta$, on a

$$\int_0^{\beta} \frac{dt}{t^2 + 1} = [\text{Arctan}(t)]_0^{\beta} \xrightarrow{\beta \rightarrow +\infty} \frac{\pi}{2}$$

$$\int_{\alpha}^0 \frac{dt}{t^2 + 1} = [\text{Arctan}(t)]_{\alpha}^0 \xrightarrow{\alpha \rightarrow -\infty} \frac{\pi}{2}$$

Exemple 3

On en déduit que les intégrales $\int_0^{+\infty} f(t) dt$ et $\int_{-\infty}^0 f(t) dt$ sont convergentes, donc l'intégrale $\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt$ est convergente par définition et sa valeur est

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t) dt = \int_{-\infty}^0 f(t) dt + \int_0^{+\infty} f(t) dt = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

ATTENTION

Il ne faut pas confondre l'objet intégrale $\int_a^b f(t) dt$ qui pourra être convergente ou divergente et le nombre $\int_a^b f(t) dt$ qui n'existe que si l'intégrale converge. Il n'y a malheureusement pas de notation différente contrairement au cas des séries numériques avec $\sum_{n \geq 0} u_n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$: c'est le contexte qui décidera.

Proposition 1

Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. L'intégrale $\int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} dt$ est convergente si et seulement si $\lambda > 0$.

Proposition 2

L'intégrale $\int_0^1 \ln(t) dt$ est convergente.

Définition (Intégrale de Riemann)

On appelle intégrale de Riemann toute intégrale de la forme $\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$ ou de la forme $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$.

Proposition (Convergence d'une intégrale de Riemann)

Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

- (i) L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^\alpha}$ est convergente si et seulement si $\alpha > 1$.
- (ii) L'intégrale $\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$ est convergente si et seulement si $\alpha < 1$.

On fixe un intervalle $]a, b[$ de $\mathbb{R}$ avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$.

Proposition (Linéarité de l'intégrale)

Soient $(\lambda, \mu) \in \mathbb{K}^2$ et $f, g :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues.

Si les intégrales $\int_a^b f(t) dt$ et $\int_a^b g(t) dt$ sont convergentes, alors

l'intégrale $\int_a^b (\lambda f(t) + \mu g(t)) dt$ est convergente et on a la relation

$$\int_a^b (\lambda f(t) + \mu g(t)) dt = \lambda \int_a^b f(t) dt + \mu \int_a^b g(t) dt.$$

Proposition (Croissance et positivité de l'intégrale)

Soient $f, g :]a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues.

- (i) Positivité de l'intégrale : si f est positive sur I et si l'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ est convergente, alors $\int_a^b f(t) dt \geq 0$.
- (ii) Croissance de l'intégrale : si $f \leq g$ sur I et si les intégrales $\int_a^b f(t) dt$ et $\int_a^b g(t) dt$ sont convergentes, alors on a l'inégalité $\int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b g(t) dt$.

Proposition (Relation de Chasles)

Soit $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{K}$ une fonction continue et $c \in]a, b[$. L'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ est convergente si et seulement si les intégrales

$$\int_a^c f(t) dt \quad \text{et} \quad \int_c^b f(t) dt$$

sont convergentes. Dans ce cas, on a la relation

$$\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt.$$

On fixe un intervalle $]a, b[$ de $\mathbb{R}$ avec $-\infty \leq a < b \leq +\infty$.

Théorème du changement de variable

Soit $\varphi :]c, d[\rightarrow]a, b[$ une bijection croissante de classe $\mathcal{C}^1$.

Si $f :]a, b[\rightarrow \mathbb{K}$ une fonction continue, alors les intégrales

$$\int_c^d f(\varphi(t))\varphi'(t) dt \quad \text{et} \quad \int_a^b f(x) dx$$

sont de mêmes natures. De plus, si les intégrales convergent, alors on a la relation

$$\int_c^d f(\varphi(t))\varphi'(t) dt = \int_a^b f(x) dx.$$

Remarques 4

- a) Il faut s'assurer que les intégrales sont convergentes dans le théorème ci-dessus pour écrire une égalité.
- b) Si $\varphi :]c, d[\rightarrow]a, b[$ est une bijection décroissante de classe $\mathcal{C}^1$, on a un résultat analogue avec les intégrales

$$\int_c^d f(\varphi(t))\varphi'(t) dt \quad \text{et} \quad \int_b^a f(x) dx.$$

- c) En pratique, le changement de variable s'effectue comme pour une intégrale sur un segment.

Exemple 4

On considère l'intégrale $I = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$.

La fonction $\varphi : t \mapsto \sin(t)$ est une bijection croissante de classe $\mathcal{C}^1$ de $]0, \pi/2[$ sur $]0, 1[$. En effectuant le changement de variable $x = \sin(t)$ dans l'intégrale I , on obtient l'intégrale

$$J = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2(t)}{\sqrt{1-\sin^2(t)}} \cos(t) dt = \int_0^{\pi/2} \sin^2(t) dt.$$

Comme la fonction $t \mapsto \sin^2(t)$ est continue sur $[0, \pi/2]$, l'intégrale J est convergente. On en déduit par le théorème du changement de variable que l'intégrale I est convergente et que

$$I = J = \int_0^{\pi/2} \sin^2(t) dt = \int_0^{\pi/2} \frac{1 - \cos(2t)}{2} dt = \left[\frac{t}{2} - \frac{1}{4} \sin(2t) \right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}.$$

Théorème d'intégration par parties

Soient $f, g :]a, b[\rightarrow \mathbb{K}$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$. Si les deux limites

$$\lim_{t \rightarrow a^+} f(t)g(t) \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow b^-} f(t)g(t)$$

existent et sont finis, alors les intégrales $\int_a^b f(t)g'(t) dt$ et $\int_a^b f'(t)g(t) dt$ sont de même nature. De plus, si les intégrales convergent, alors on a la relation

$$\int_a^b f(t)g'(t) dt = [f(t)g(t)]_a^b - \int_a^b f'(t)g(t) dt.$$

Remarque 5

Dans l'énoncé du théorème ci-dessus, la définition du terme entre crochet est

$$[f(t)g(t)]_a^b = \lim_{t \rightarrow b^-} f(t)g(t) - \lim_{t \rightarrow a^+} f(t)g(t).$$

Exemple 5

On considère l'intégrale $I = \int_0^1 2t \ln(t) dt$. Les fonctions $f: t \mapsto \ln(t)$ et $g: t \mapsto t^2$ sont de classe $\mathcal{C}^1$ et on a par croissance comparée que

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} f(t)g(t) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{t \rightarrow 1^-} f(t)g(t) = 0.$$

On en déduit que les intégrales

$$I = \int_0^1 f(t)g'(t) dt = \int_0^1 2t \ln(t) dt \quad \text{et} \quad J = \int_0^1 f'(t)g(t) dt = \int_0^1 t dt$$

sont de même nature. Comme l'intégrale J est convergente, on en déduit que I converge et que

$$\int_0^1 2t \ln(t) dt = [t^2 \ln(t)]_0^1 - \int_0^1 t dt = (0 - 0) - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}.$$

On fixe un intervalle $[a, b[$ de $\mathbb{R}$ avec $a < b \leq +\infty$.

Lemme 1

Soit $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue et positive. L'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ est convergente si et seulement si la fonction $\beta \mapsto \int_a^\beta f(t) dt$ est majorée sur $[a, b[$.

Si $f: [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ et $g: [a, b[\rightarrow \mathbb{R}$ sont deux fonctions, on rappelle que l'on dit que la fonction f est dominée par la fonction g au voisinage de b^- , ce que l'on note $f(t) \underset{b^-}{=} O(g(t))$, si

$$\exists K \in \mathbb{R}, \quad \forall x \text{ dans un voisinage de } b^-, \quad |f(x)| \leq K|g(x)|.$$

Si la fonction g ne s'annule pas au voisinage de b^- , la définition ci-dessus est équivalente à dire que le quotient f/g est une fonction bornée au voisinage de b^- .

Théorème de comparaison

Soient $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ deux fonctions continues et positives.

- (i) Si $0 \leq f(t) \leq g(t)$ pour tout $t \in [a, b]$, alors la convergence de $\int_a^b g(t) dt$ implique celle de $\int_a^b f(t) dt$.
- (ii) Si $f(t) \underset{b^-}{=} O(g(t))$, alors la convergence de $\int_a^b g(t) dt$ implique celle de $\int_a^b f(t) dt$.
- (iii) Si $f(t) \underset{b^-}{\sim} g(t)$, alors la convergence de $\int_a^b g(t) dt$ équivaut à celle de $\int_a^b f(t) dt$.

Remarques 6

- a) Sous l'hypothèse du (i), on a en plus l'inégalité $\int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b g(t) dt$.
- b) Sous l'hypothèse du (i) ou du (ii), on a par contraposition que la divergence de l'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ implique celle de $\int_a^b g(t) dt$.
- c) L'assertion (i) reste valable si l'inégalité $0 \leq f(t) \leq g(t)$ n'est que vérifiée au voisinage de b^- .
- d) L'assertion (ii) reste valable si on remplace $f(t) \underset{b^-}{=} O(g(t))$ par $f(t) \underset{b^-}{=} o(g(t))$.
- e) Le théorème s'adapte naturellement à des intégrales de fonctions continues et positives sur $]a, b]$.

Exemples 6

a) On souhaite étudier la convergence de l'intégrale $I = \int_1^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2} dt$.

La fonction $t \mapsto \frac{\sin^2(t)}{t^2}$ est continue et positive sur $[1, +\infty[$. De plus, on remarque que l'on a l'inégalité

$$\forall t \in [1, +\infty[, \quad 0 \leq \frac{\sin^2(t)}{t^2} \leq \frac{1}{t^2}$$

et comme $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ est une intégrale de Riemann convergente, on conclut que I converge par comparaison.

Exemples 6

b) On souhaite étudier la convergence de l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^3} dt$.

La fonction $t \mapsto \frac{\ln(t)}{t^3}$ est continue et positive sur $[1, +\infty[$. Par croissance comparée, on remarque que

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} t^2 \left(\frac{\ln(t)}{t^3} \right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\ln(t)}{t^3} = o\left(\frac{1}{t^2}\right).$$

Or $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ est une intégrale de Riemann convergente, donc I converge par comparaison.

Exemples 6

c) On souhaite étudier la convergence de l'intégrale $I = \int_0^1 \frac{\sin(t)}{t} dt$.

La fonction $t \mapsto \frac{\sin(t)}{t}$ est continue sur $]0, 1]$. On remarque que l'on a l'équivalent

$$\frac{\sin(t)}{t} \underset{0^+}{\sim} \frac{t}{t} \underset{0^+}{\sim} 1 \geq 0$$

et que $\int_0^1 1 dt$ est une intégrale convergente, donc l'intégrale I converge par comparaison.

On considère un intervalle non vide I de $\mathbb{R}$ et l'on note $a = \inf(I)$ et $b = \sup(I)$. En particulier, l'intervalle I est nécessairement de la forme $[a, b]$, $[a, b[$, $]a, b]$ ou $]a, b[$.

Définition (Intégrale absolument convergente)

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction continue. On dit que $\int_a^b f(t) dt$ est absolument convergente si l'intégrale $\int_a^b |f(t)| dt$ est convergente.

Définition (Fonction intégrable)

Une fonction continue $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ est dite intégrable sur l'intervalle I si l'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ est absolument convergente.

Remarques 7

- a) Si $f : [a, b[\rightarrow \mathbb{K}$ est intégrable sur $[a, b[$, on dit que f est intégrable en b .
- b) Si $f :]a, b] \rightarrow \mathbb{K}$ est intégrable sur $]a, b]$, on dit que f est intégrable en a .

Exemples 7

- a) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. La fonction $t \mapsto e^{-\lambda t}$ est intégrable en $+\infty$ si et seulement si $\lambda > 0$.
- b) La fonction $t \mapsto \ln(t)$ est intégrable en 0^+ .
- c) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est intégrable en $+\infty$ si et seulement si $\alpha > 1$.
- d) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La fonction $t \mapsto \frac{1}{t^\alpha}$ est intégrable en 0^+ si et seulement si $\alpha < 1$.

Théorème 1

Si une intégrale converge absolument, alors elle converge.

Exemple 8

On souhaite étudier la convergence de l'intégrale $I = \int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^2} dt$.

La fonction $t \mapsto \frac{\sin(t)}{t^2}$ est continue sur $[1, +\infty[$. On remarque que l'on a l'inégalité

$$\forall t \in [1, +\infty[, \quad 0 \leq \left| \frac{\sin(t)}{t^2} \right| \leq \frac{1}{t^2}$$

et comme $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t^2}$ est une intégrale de Riemann convergente, on obtient que l'intégrale I est absolument convergente par comparaison. On conclut par le théorème précédent que l'intégrale I est convergente.

ATTENTION

La réciproque du théorème est fausse. On peut par exemple vérifier que l'intégrale $\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} dt$ est convergente, mais qu'elle ne converge pas absolument.

Notation

Si $f: I \rightarrow \mathbb{K}$ est une fonction continue et intégrable sur I , alors on note

$$\int_I f = \int_I f(t) \, dt = \int_a^b f(t) \, dt.$$

Proposition 3 (Inégalité triangulaire)

Si $f: I \rightarrow \mathbb{K}$ est une fonction intégrable, alors on a l'inégalité

$$\left| \int_I f(t) \, dt \right| \leq \int_I |f(t)| \, dt.$$

Notation

On désigne l'ensemble des fonctions intégrables sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$ par $L^1(I, \mathbb{K})$.

Corollaire 1

L'ensemble $L^1(I, \mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathcal{F}(I, \mathbb{K})$.

Proposition 4

Si $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ est continue, positive, intégrable sur I et vérifie $\int_I f(t) dt = 0$, alors f est nulle.

Lorsque l'on considère des fonctions $f_1, \dots, f_n : I \rightarrow \mathbb{K}$ intégrables sur I , on a vu que leur somme $f_1 + \dots + f_n$ est intégrable sur I et que l'on a

$$\int_I \left(\sum_{k=1}^n f_k(t) \right) dt = \sum_{k=1}^n \int_I f_k(t) dt.$$

Dans cette partie, nous allons étudier un résultat permettant d'étendre la relation précédente à une somme infinie.

Théorème d'intégration terme à terme

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{K}$ une fonction continue et $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de fonctions intégrables de I dans $\mathbb{K}$ telles que

$$\forall t \in I, \quad f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t).$$

Si la série $\sum \int_I |f_n(t)| dt$ converge, alors la fonction f est intégrable sur I et on a

$$\int_I f(t) dt = \int_I \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(t) \right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t) dt.$$

DÉMONSTRATION**ADMISE**

Exemple 9

Montrons que $\int_0^{+\infty} \frac{te^{-t}}{1-e^{-t}} dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$. La fonction $f: t \mapsto \frac{te^{-t}}{1-e^{-t}}$ est continue sur $]0, +\infty[$. De plus, comme $e^{-t} \in]0, 1[$ pour tout $t \in]0, +\infty[$, on a via la série géométrique que

$$\forall t \in]0, +\infty[, \quad f(t) = \frac{te^{-t}}{1-e^{-t}} = te^{-t} \sum_{n=0}^{+\infty} (e^{-t})^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{te^{-(n+1)t}}_{f_n(t)}.$$

Exemple 9

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue sur $]0, +\infty[$, puis en utilisant une intégration par parties, on vérifie que f_n est intégrable sur $]0, +\infty[$ et que l'on a

$$\int_0^{+\infty} |f_n(t)| dt = \int_0^{+\infty} f_n(t) dt = \frac{1}{n+1} \int_0^{+\infty} e^{-(n+1)t} dt = \frac{1}{(n+1)^2}.$$

Finalement, la série numérique $\sum_{n \geq 0} \int_0^{+\infty} |f_n(t)| dt$ est convergente, donc d'après le théorème d'intégration terme à terme, la fonction f est intégrable et on a

$$\int_0^{+\infty} f(t) dt = \int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(t) \right) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t) dt = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2}.$$

On souhaite étudier le convergence d'une intégrale $\int_a^b f(t) dt$ où f est une fonction définie sur un des intervalles

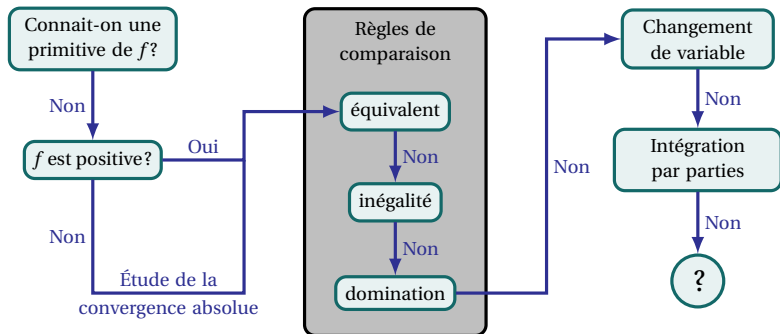
$$(i) I = [a, b], \quad (ii) I = [a, b[, \quad (iii) I =]a, b], \quad (iv) I =]a, b[.$$

1) On détermine si f est continue sur $[a, b]$, $[a, b[$, $]a, b]$ ou $]a, b[$.

2) On distingue trois cas.

- a) Si f est continue sur $[a, b]$ l'intégrale est convergente par les résultats de première année.
- b) Si f n'est que continue sur $]a, b[$, on sépare l'intégrale en deux pour se ramener au cas où seul une des deux extrémités de l'intervalle d'intégration est ouverte.

- 3) On s'est donc ramené à étudier la convergence d'une intégrale d'une fonction continue f sur $[a, b[$ ou $]a, b]$. Le graphe ci-dessous résume la démarche à suivre pour étudier cette intégrale.



Si la fonction f n'est pas positive et que l'on a démontré qu'elle ne converge pas absolument, on sort du cadre du programme dans le cas général.

- 4) Dans le cas où on avait séparé l'intégrale de départ en deux, on conclut (Par définition, l'intégrale converge si chacune des deux intégrales obtenus après la séparation convergent).

Exemple 10

Étudions la convergence de l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} te^{-t^2} dt$.

La fonction $f: t \mapsto te^{-t^2}$ est continue sur $[0, +\infty[$. Pour tout $\beta \in [0, +\infty[$, on a

$$\int_0^\beta te^{-t^2} dt = \left[-\frac{1}{2}e^{-t^2} \right]_0^\beta = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-\beta^2} \xrightarrow{\beta \rightarrow +\infty} \frac{1}{2},$$

donc l'intégrale I converge et sa valeur est $1/2$.

Exemple 11

Étudions la convergence de l'intégrale $I = \int_1^{+\infty} \frac{2 + \cos(t)}{t} dt$.

La fonction $f: t \mapsto \frac{2 + \cos(t)}{t}$ est continue sur $[1, +\infty[$. On a

l'inégalité $0 \leq \frac{1}{t} \leq f(t)$ pour tout $t \in [1, +\infty[$ et l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{dt}{t}$ est une intégrale de Riemann divergente, donc I diverge par comparaison.

Exemple 12

Étudions la convergence de l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)e^{-t}}{\sqrt{t}} dt$.

La fonction $f: t \mapsto \frac{\cos(t)e^{-t}}{\sqrt{t}}$ est continue sur $]0, +\infty[$. On doit donc étudier la convergence des deux intégrales

$$I_1 = \int_0^1 \frac{\cos(t)e^{-t}}{\sqrt{t}} dt \quad \text{et} \quad I_2 = \int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)e^{-t}}{\sqrt{t}} dt.$$

Exemple 12

$$I_1 = \int_0^1 \frac{\cos(t)e^{-t}}{\sqrt{t}} dt \quad \text{et} \quad I_2 = \int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)e^{-t}}{\sqrt{t}} dt.$$

- On a l'équivalent $f(t) \underset{0^+}{\sim} \frac{1}{\sqrt{t}} \geq 0$ et $\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{t}}$ est une intégrale de Riemann convergente, donc l'intégrale I_1 converge absolument par comparaison.
- On a l'inégalité $0 \leq |f(t)| \leq e^{-t}$ pour tout $t \in [1, +\infty[$ et l'intégrale $\int_1^{+\infty} e^{-t} dt$ est une intégrale de référence convergente, donc I_2 converge absolument par comparaison, donc I_2 converge.

Les intégrales I_1 et I_2 convergent, donc l'intégrale I est convergente.

Exemple 13

Étudions la convergence de l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$.

La fonction $f: t \mapsto \frac{e^{-t}}{t}$ est continue sur $]0, +\infty[$. On doit donc étudier la convergence des deux intégrales

$$I_1 = \int_0^1 \frac{e^{-t}}{t} dt \quad \text{et} \quad I_2 = \int_1^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt.$$

- On a l'équivalent $f(t) \underset{0^+}{\sim} \frac{1}{t} \geq 0$ et $\int_0^1 \frac{dt}{t}$ est une intégrale de Riemann divergente, donc l'intégrale I_1 diverge par comparaison.
- Comme l'intégrale I_1 diverge, l'étude de la convergence de I_2 est inutile.

Comme l'intégrale I_1 diverge, on conclut que l'intégrale I diverge.

Exemple 14

Étudions la convergence de l'intégrale $I = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t}}$.

La fonction $f: t \mapsto \frac{1}{\sqrt{1-t}}$ est continue sur $[0, 1[$. En utilisant le changement de variable $u = 1 - t$ dans l'intégrale I , on obtient l'intégrale

$$J = \int_0^1 \frac{du}{\sqrt{u}}.$$

L'intégrale J est une intégrale de Riemann convergente, donc l'intégrale I est convergente par le théorème du changement de variable.

De plus, on a $I = J$.