TD 4 Intégration d'une fonction sur un intervalle

Partie I Révisions - Intégration sur un segment

I.A - Calcul direct d'intégrales et de primitives

Exercice 1 : Calcul les intégrales suivantes.

$$(i)\ \int_0^1 \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}\,\mathrm{d}t,\qquad (ii)\ \int_0^1 t\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t,\qquad (iii)\ \int_0^\pi \cos(t)\mathrm{e}^{\sin(t)}\,\mathrm{d}t,$$

$$(iv)\ \int_0^{\pi/4} \tan(t)\,\mathrm{d}t,\qquad (v)\ \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^t}{\sqrt{\mathrm{e}^t+1}}\,\mathrm{d}t,\qquad (vi)\ \int_0^{1/2} \frac{\mathrm{Arcsin}(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 2 - Rationnelles : Déterminer une primitive des fonctions suivantes.

$$(i)\ x\mapsto \frac{1}{x^2-5x+6},\qquad (ii)\ x\mapsto \frac{1}{x^2-6x+9},\qquad (iii)\ x\mapsto \frac{1}{x^2+2x+3},$$

$$(iv)\ x\mapsto \frac{x^3}{x^2-3x+2},\qquad (v)\ x\mapsto \frac{x^2}{x^2-4x+5},\qquad (vi)\ x\mapsto \frac{1}{x(x+1)(x+2)}.$$

Exercice 3 : Pour $(m,n)\in\mathbb{N}^2$, calculer l'intégrale

$$I_{m,n} = \int_0^{2\pi} \cos(mt)\cos(nt)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 4 : On considère un couple non nul $(a,b)\in\mathbb{R}^2$. Calculer une primitive des fonctions $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ et $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définies par

$$\forall t\in\mathbb{R},\quad f(t)=\mathrm{e}^{at}\cos(bt)\quad\text{et}\quad g(t)=\mathrm{e}^{at}\sin(bt).$$

Exercice 5 : Soit $\lambda\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$. Déterminer une primitive de $t\mapsto \dfrac{1}{t-\lambda}$.

I.B - Intégration par parties

Exercice 6 : Calculer les intégrales suivantes avec des intégrations par parties.

$$(i)\ \int_0^1 \ln\left(1+t^2\right)\mathrm{d}t,\qquad (ii)\ \int_0^\pi t^2\cos(2t)\,\mathrm{d}t,\qquad (iii)\ \int_0^{1/2} \mathrm{Arcsin}(t)\,\mathrm{d}t,$$

$$(iv)\ \int_0^1 \left(t^2+t+1\right)\mathrm{e}^{2t}\,\mathrm{d}t,\qquad (v)\ \int_0^1 \mathrm{Arctan}(t)\,\mathrm{d}t,\qquad (vi)\ \int_0^1 t\,\mathrm{Arctan}(t)\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 7 : Pour tout $(m,n)^2\in\mathbb{N}$, on considère l'intégrale

$$I_{m,n} = \int_0^1 t^m(1-t)^n\,\mathrm{d}t.$$

1. Exprimer $I_{m+1,n-1}$ en fonction de $I_{m,n}$ pour tout $(m,n)\in\mathbb{N}^2$.
2. En déduire une expression explicite de $I_{m,n}$ pour tout $(m,n)\in\mathbb{N}^2$.

Exercice 8 : Soit $n\in\mathbb{N}^*$. Déterminer une primitive de $x\mapsto \ln^n(x)$.

Exercice 9 : Soient $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^\infty$ et $r\in\mathbb{N}$. On considère la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad I_n = \int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0.
2. Déterminer un développement asymptotique à la précision $o\left(n^{-r-1}\right)$ de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

I.C - Changement de variable

Exercice 10 : Calculer les intégrales suivantes en utilisant le changement de variable indiqué.

$$(i)\ \int_1^2 \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \text{ avec } u=\sqrt{t}, \qquad (ii)\ \int_1^{\mathrm{e}} \frac{\ln(t)}{t+t\ln^2(t)}\,\mathrm{d}t \text{ avec } u=\ln(t),$$

$$(iii)\ \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{2t}}{1+\mathrm{e}^t}\,\mathrm{d}t \text{ avec } u=\mathrm{e}^t, \qquad (iv)\ \int_0^{\pi/4} \frac{\mathrm{d}t}{1+\sin^2(t)} \text{ avec } u=\tan(t),$$

$$(v)\ \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\left(1+t^2\right)^2} \text{ avec } t=\tan(x), \qquad (vi)\ \int_{1/2}^2 \frac{\ln(t)}{1+t^2}\,\mathrm{d}t \text{ avec } u=1/t.$$

Exercice 11 : En utilisant le changement de variable indiqué, déterminer une primitive des fonctions suivantes.

$$(i)\ t\mapsto \frac{1}{\cos(t)} \text{ avec } u=\sin(t), \qquad (ii)\ t\mapsto \frac{1}{\sin(t)} \text{ avec } u=\cos(t),$$

$$(iii)\ t\mapsto \frac{1}{\mathrm{ch}(t)} \text{ avec } u=\mathrm{e}^t, \qquad (iv)\ t\mapsto \frac{1}{\mathrm{sh}(t)} \text{ avec } u=\mathrm{e}^t.$$

I.D - Propriétés générales sur les intégrales

Exercice 12 : Déterminer la limite de la suite $(I_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par

$$\forall n\in\mathbb{N},\quad I_n=\int_0^1 x^n\ln(1+x)\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 13 : On considère les intégrales suivantes.

$$I=\int_0^{\pi/2}\frac{\cos(t)}{\cos(t)+\sin(t)}\,\mathrm{d}t \quad\text{et}\quad J=\int_0^{\pi/2}\frac{\sin(t)}{\cos(t)+\sin(t)}\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que $I=J$.
2. En déduire la valeur de I et J.

Exercice 14 : Déterminer les limites suivantes.

$$(i)\ \lim_{x\to 0^+}\int_x^{2x}\frac{\exp(t)}{t}\,\mathrm{d}t, \qquad (ii)\ \lim_{x\to+\infty}\int_x^{2x}\frac{\cos(1/t)}{t}\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 15 : Étudier la fonction $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ définie par

$$\forall x\in\mathbb{R},\quad f(x)=\int_x^{2x}\frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t^4+t^2+1}}.$$

I.E - Sommes de Riemann

Exercice 16 : Déterminer les limites des suites de terme général suivant.

$$(i)\ \sum_{k=1}^n\frac{n}{n^2+k^2}, \qquad (ii)\ \sum_{k=1}^n\frac{k}{n^2+k^2},$$

$$(iii)\ \sum_{k=1}^n\frac{1}{\sqrt{n^2+2kn}}, \qquad (iv)\ \prod_{k=1}^n\left(1+\frac{k}{n}\right)^{1/n}.$$

Exercice 17 : Déterminer un équivalent des suites de terme général suivant.

$$(i)\ \sum_{k=1}^n\sqrt{k}, \qquad (ii)\ \sum_{k=1}^n\frac{1}{(n+2k)^3}.$$

Exercice 18 : On considère la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ définie par

$$\forall n\in\mathbb{N}^*,\quad u_n=\sum_{k=1}^n\sin\left(\frac{k\pi}{n}\right)\sin\left(\frac{k}{n^2}\right).$$

1. Pour tout réel $x\geqslant 0$, montrer que $|\sin(x)-x|\leqslant x^3/6$.
2. En déduire la limite de la suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$.

Exercice 19 : Soit $x\in\mathbb{R}$ avec $|x|\neq 1$. Calculer l'intégrale $\displaystyle\int_0^{2\pi}\ln\left|x-\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right|\mathrm{d}t$.

Partie II Intégration sur un intervalle quelconque

Exercice 20 : Étudier la convergence des intégrales suivantes, puis calculer leur valeur en cas de convergence.

$$(i)\ \int_1^2 \frac{\mathrm{d}t}{(t-1)^2}, \qquad (ii)\ \int_0^{\pi/2} \frac{\cos(t)}{\sqrt{\sin(t)}}\,\mathrm{d}t, \qquad (iii)\ \int_{-1}^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t^2}},$$

$$(iv)\ \int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t, \qquad (v)\ \int_0^{\pi/2} \tan(t)\,\mathrm{d}t, \qquad (vi)\ \int_0^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t.$$

Exercice 21 : Pour $a \in \mathbb{R}$ avec $a > 0$, on considère les intégrales

$$I = \int_0^{+\infty} \cos(t)\mathrm{e}^{-at}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad J = \int_0^{+\infty} \sin(t)\mathrm{e}^{-at}\,\mathrm{d}t.$$

Montrer que les intégrales I et J sont convergentes et calculer leur valeur.

Exercice 22 : Soit $(p,q) \in \mathbb{R}^2$ tel que $p^2 < 4q$. Montrer que l'intégrale ci-dessous est convergente et calculer sa valeur.

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2+pt+q}.$$

Exercice 23 - Intégrales de Frullani : Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ avec $0 < x < y$. On considère l'intégrale

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-xt}-\mathrm{e}^{-yt}}{t}\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que pour tout $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}^2$ avec $0 < \alpha < \beta$, on a

$$\int_\alpha^\beta \frac{\mathrm{e}^{-xt}-\mathrm{e}^{-yt}}{t}\,\mathrm{d}t = \int_{\alpha x}^{\alpha y} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u - \int_{\beta x}^{\beta y} \frac{\mathrm{e}^{-u}}{u}\,\mathrm{d}u.$$

2. En déduire que l'intégrale I est convergente et déterminer sa valeur.

Exercice 24 : Étudier la convergence des intégrales ci-dessous.

$$(i)\ \int_1^{+\infty} \frac{(t-1)(t-5)}{t^2(t^2+1)}\,\mathrm{d}t, \qquad (ii)\ \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{e}^t-1}, \qquad (iii)\ \int_0^{+\infty} \cos\left(\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t,$$

$$(iv)\ \int_0^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{t^2}\right)\mathrm{d}t, \qquad (v)\ \int_0^{+\infty} \ln(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t, \qquad (vi)\ \int_0^1 \frac{\ln(t)}{(1-t)^{3/2}}\,\mathrm{d}t,$$

$$(vii)\ \int_0^{+\infty} \sin(t)\sin\left(\mathrm{e}^{-t}\right)\mathrm{d}t, \qquad (viii)\ \int_0^{+\infty} \frac{\ln(t)}{1+t^3}\,\mathrm{d}t, \qquad (ix)\ \int_{-\infty}^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t,$$

$$(x)\ \int_0^3 \frac{\mathrm{d}t}{(3-t)\sqrt{t}}, \qquad (xi)\ \int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{1-\sqrt{t}}, \qquad (xii)\ \int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-\sqrt{\ln(t)}}\,\mathrm{d}t.$$

Exercice 25 : Étudier la convergence des intégrales suivantes.

$$(i)\ \int_0^{+\infty} \left((t+1)^{1/3}-t^{1/3}\right)^2\mathrm{d}t, \qquad (ii)\ \int_0^{+\infty} \left(t+2-\sqrt{t^2+4t+1}\right)\mathrm{d}t.$$

Exercice 26 : Pour $a \in \mathbb{R}$, on considère l'intégrale

$$I_a = \int_0^{+\infty} \frac{t-\sin(t)}{t^a}\,\mathrm{d}t.$$

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $a \in \mathbb{R}$ pour que I_a converge.

Exercice 27 : Montrer que l'intégrale I ci-dessous est convergente, puis calculer sa valeur en utilisant le changement de variable $u = \mathrm{e}^t$.

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(\mathrm{e}^t+1)(\mathrm{e}^{-t}+1)}.$$

Exercice 28 : On considère les intégrales

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{1+t^3} \quad \text{et} \quad J = \int_0^{+\infty} \frac{t\,\mathrm{d}t}{1+t^3}.$$

1. Montrer que les intégrales I et J convergent.
2. Montrer en utilisant le changement de variable $u = 1/t$ que $I = J$.
3. En déduire la valeur de I.

Exercice 29 : Pour $a \in \mathbb{R}$ avec $a > 0$, on considère les intégrales

$$I_a = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)(1+t^a)} \quad \text{et} \quad J_a = \int_0^{+\infty} \frac{t^a\,\mathrm{d}t}{(1+t^2)(1+t^a)}.$$

1. Montrer que les intégrales I_a et J_a sont convergentes.
2. En posant $u = 1/t$, montrer que $I_a = J_a$.
3. Calculer $I_a + J_a$. En déduire la valeur de I_a et J_a.

Exercice 30 : On considère l'intégrale

$$I = \int_0^1 \frac{\ln(t)}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t.$$

En utilisant une intégration par partie, montrer que l'intégrale I est convergente et calculer sa valeur.

Exercice 31 : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère l'intégrale

$$I_n = \int_0^{+\infty} t^n \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que l'intégrale I_n est convergente pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Exprimer I_{n+1} en fonction de I_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
3. En déduire une expression explicite de I_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 32 : Pour tout $(n,p) \in \mathbb{N}^2$, on considère l'intégrale

$$I_{n,p} = \int_0^1 t^n \ln^p(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que l'intégrale $I_{n,p}$ est convergente pour tout $(n,p) \in \mathbb{N}^2$.
2. Calculer la valeur de $I_{n,p}$ pour tout $(n,p) \in \mathbb{N}^2$.

Exercice 33 : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère l'intégrale

$$I_n = \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{(1+t^2)^{n+1}}.$$

1. Montrer que l'intégrale I_n est convergente pour tout $n \in \mathbb{N}$.
2. Calculer la valeur de I_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 34 : On considère les intégrales

$$I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad J = \int_0^{+\infty} \frac{1-\cos(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que l'intégrale I converge si et seulement si l'intégrale J converge.
2. En déduire que l'intégrale I est convergente.
3. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \left| \frac{\sin(t)}{t} \right| \mathrm{d}t \geqslant \frac{2}{(n+1)\pi}.$$
4. En déduire que l'intégrale I n'est pas absolument convergente.

Partie III Intégration terme à terme

Exercice 35 : Pour tout nombre $\lambda > 0$, on considère l'intégrale $I_\lambda = \int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t$.

1. Pour tout $\lambda > 0$, montrer que l'intégrale I_λ converge et calculer sa valeur.
2. Montrer que l'on a l'égalité
$$\int_0^{+\infty} \frac{t}{\mathrm{sh}(t)}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{(2n+1)^2}.$$

Exercice 36 : Démontrer les égalités suivantes.

$$(i) \quad \int_0^1 \frac{\ln(t)}{1-t^2}\,\mathrm{d}t = -\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2}, \qquad (ii) \quad \int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{\mathrm{e}^t - 1}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2+1}.$$