Mathématiques

PT

Lycée Couffignal

Chapitre 4

Intégration sur un intervalle

Plan du chapitre

Introduction

L'origine de l'intégration remonte à l'antiquité dans les problèmes d'ordre géométrique de calculs d'aires (quadrature), de volumes et de longueurs (rectification) qu'étudiaient les Grecs. Eudoxe invente la méthode d'exhaustion au IVe siècle avant notre ère qui consiste à établir des encadrements successifs de l'aire d'une surface par deux quantités dont la différence s'épuise. Par ce procédé, Archimède a notamment déterminé un encadrement de π donnant ses deux premières décimales et il a calculé l'aire de la surface comprise entre une parabole et une de ses cordes.

Au cours du Xe siècle, les arabes déterminent l'aire d'une surface délimitée par la courbe de la fonction $x \mapsto x^4$ en se basant sur les travaux d'Archimède. Ce n'est que dans la première moitié du XVIIe siècle que Fermat calcule l'aire d'une surface comprise entre l'axe des abscisses, une parallèle à l'axe des ordonnées et la courbe de la fonction $x \mapsto x^n$ où $n \in \mathbb{N}$. À la même époque, le mathématicien italien Cavalieri invente un nouveau procédé de calcul d'aire : la méthode des indivisibles. L'intégration était une affaire de géomètre jusque là.

Dans la seconde moitié du XVIIe siècle, Newton et Leibniz fondèrent le calcul infinitésimal qui se compose de deux branches : le calcul différentiel et le calcul intégral. Ils développent la notion de différentielle et ils établissent le lien entre dérivation et intégration. La notation $\int$ est utilisée pour la première fois par Leibniz : un grand S pour la première lettre de *summa*, somme en latin.

Il subsiste néanmoins des failles dans la théorie de Leibniz qui manque de rigueur, principalement à cause de la mauvaise compréhension des notions de nombre et de fonction à cette époque. La théorie ne précise pas par exemple quelles sont les fonctions que l'on peut intégrer avec la construction de Leibniz. Cauchy est le premier à donner une définition rigoureuse de l'intégrale d'une fonction continue dans son *Résumé des leçons données à l'École Royale Polytechnique sur le calcul infinitésimal* publié en 1823. Sa construction s'appuie sur ce que l'on appelle actuellement une somme de Riemann et c'est celle qui est enseignée en classe préparatoire de nos jours. En 1854, Riemann présente un travail intitulé *Sur la possibilité de représenter une fonction par une série trigonométrique* pour sa thèse d'habilitation à l'Université de Göttingen dans lequel il étend la théorie d'intégration de Cauchy à une plus grande classe de fonctions. L'intégrale de Riemann est la première théorie d'intégration satisfaisante.

Elle présente néanmoins un inconvénient : une suite de fonctions intégrables au sens de Riemann peut converger simplement vers une fonction qui n'est pas intégrable au sens de Riemann. C'est pour pallier cette difficulté que Lebesgue présente en 1902 dans sa thèse intitulée *Intégrale, longueur, aire* une nouvelle théorie de l'intégration qui porte aujourd'hui son nom. Par la suite, d'autres intégrales sont construites. L'intégration est encore un sujet pour la recherche contemporaine.

L'intégration est essentielle dans les différentes disciplines scientifiques. Elle permet par exemple de définir la transformation de Laplace et la transformation de Fourier qui sont des notions importantes en physique et en science de l'ingénieur. L'intégration joue également un rôle central en probabilité et en statistique.

L'objectif de ce chapitre est d'étendre la notion d'intégrale d'une fonction continue sur un intervalle qui n'est pas nécessairement un segment. Une première difficulté apparait directement : l'aire sous la courbe de la fonction n'est plus nécessairement fini, ce qui nous amènera à définir la notion d'intégrale convergente.

Dans tout le chapitre, on désigne par $\mathbb{K}$ le corps $\mathbb{R}$ ou le corps $\mathbb{C}$.

Partie I Intégrale d'une fonction continue sur un intervalle

I.A - Convergence d'une intégrale

Nous allons distinguer trois cas pour définir l'intégrale d'une fonction continue $f : I \to \mathbb{K}$ où I est un intervalle qui n'est pas un segment (ce cas étant déjà traité en première année) :

(i) $I = [a, b[$, (ii) $I =]a, b]$, (iii) $I =]a, b[$.

Définition (Intégrale d'une fonction sur $[a, b[$) : Soit $f : [a, b[\to \mathbb{K}$ une fonction continue avec $b \in]a, +\infty]$. L'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est dite convergente si la fonction $\beta \mapsto \displaystyle\int_a^\beta f(t)\,\mathrm{d}t$ admet une limite finie lorsque $\beta \to b^-$. Dans ce cas, on note

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{\beta \to b^-} \int_a^\beta f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale est divergente.

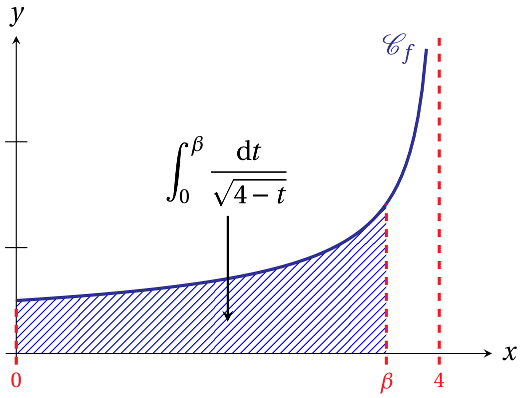
Remarque 1 : On dit aussi que l'intégrale est convergente (ou divergente) en b.

Exemples 1 :

a) On considère la fonction continue $f : [0, 4[\to \mathbb{R}$ définie par $f : t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{4-t}}$. Pour tout $\beta \in [0, 4[$, on a

$$\int_0^\beta \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{4-t}} = \left[-2\sqrt{4-t}\right]_0^\beta \xrightarrow[\beta \to 4^-]{} 4.$$

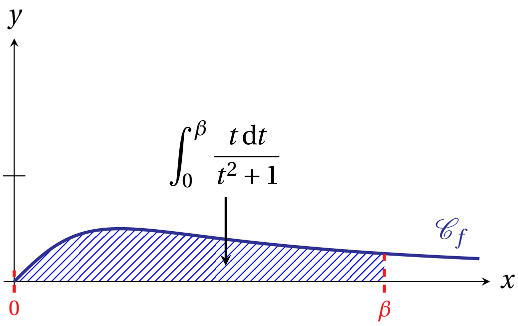
On en déduit que l'intégrale $\displaystyle\int_0^4 f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente et que sa valeur est 4.



b) On considère la fonction continue $f : [0, +\infty[\to \mathbb{R}$ définie par $f : t \mapsto \dfrac{t}{t^2+1}$. Pour tout $\beta \in [0, +\infty[$, on a

$$\int_0^\beta \frac{t\,\mathrm{d}t}{t^2+1} = \left[\frac{1}{2}\ln\left(t^2+1\right)\right]_0^\beta \xrightarrow[\beta \to +\infty]{} +\infty,$$

donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t$ est divergente.



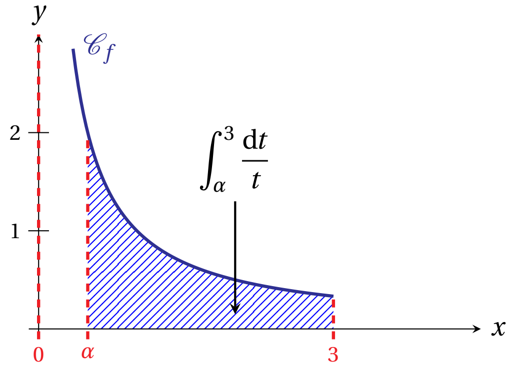
Définition (Intégrale d'une fonction sur $]a, b]$) : Soit $f :]a, b] \to \mathbb{K}$ une fonction continue avec $a \in [-\infty, b[$. L'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est dite convergente si la fonction $\alpha \mapsto \displaystyle\int_\alpha^b f(t)\,\mathrm{d}t$ admet une limite finie lorsque $\alpha \to a^+$. Dans ce cas, on note

$$\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{\alpha \to a^+} \int_\alpha^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale est divergente.

Remarque 2 : On dit aussi que l'intégrale est convergente (ou divergente) en a.

Exemple 2 : On considère la fonction continue $f :]0,3] \to \mathbb{R}$ définie par $f : t \mapsto \dfrac{1}{t}$.



Pour tout $\alpha \in]0,3]$, on a

$$\int_\alpha^3 \frac{dt}{t} = [\ln(t)]_\alpha^3 \xrightarrow[\alpha \to 0^+]{} +\infty,$$

donc l'intégrale $\displaystyle\int_0^3 f(t)\,dt$ est divergente.

Définition (Intégrale d'une fonction sur $]a,b[$) : Soit $f :]a,b[\to \mathbb{K}$ continue avec $-\infty \leqslant a \leqslant b \leqslant +\infty$. L'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ est dite convergente s'il existe un réel $c \in]a,b[$ tel que

$$\int_a^c f(t)\,dt \quad \text{et} \quad \int_c^b f(t)\,dt$$

sont convergentes. Dans ce cas, on note

$$\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt.$$

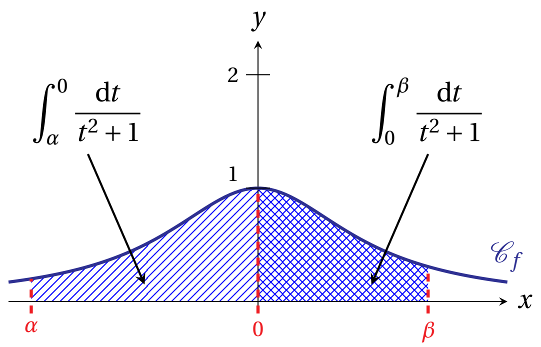
Dans le cas contraire, on dit que l'intégrale est divergente.

Remarques 3 :

a) La convergence ou la divergence de l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ ne dépend pas du choix du point $c \in]a,b[$.

b) Si l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,dt$ est convergente, sa valeur ne dépend pas du choix du point $c \in]a,b[$.

Exemple 3 : On considère la fonction continue $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f : t \mapsto \dfrac{1}{t^2+1}$.



Pour tout $\alpha < 0 < \beta$, on a

$$\int_0^\beta \frac{dt}{t^2+1} = [\text{Arctan}(t)]_0^\beta \xrightarrow[\beta \to +\infty]{} \frac{\pi}{2}$$

$$\int_\alpha^0 \frac{dt}{t^2+1} = [\text{Arctan}(t)]_\alpha^0 \xrightarrow[\alpha \to -\infty]{} \frac{\pi}{2}$$

On en déduit que les intégrales $\displaystyle\int_0^{+\infty} f(t)\,dt$ et $\displaystyle\int_{-\infty}^0 f(t)\,dt$ sont convergentes, donc l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt$ est convergente par définition et sa valeur est

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\,dt = \int_{-\infty}^0 f(t)\,dt + \int_0^{+\infty} f(t)\,dt = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

ATTENTION : Il ne faut pas confondre l'objet intégrale $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ qui pourra être convergente ou divergente et le nombre $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ qui n'existe que si l'intégrale converge. Il n'y a malheureusement pas de notation différente contrairement au cas des séries numériques avec $\sum_{n\geqslant 0} u_n$ et $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$: c'est le contexte qui décidera.

I.B - Intégrales de référence

Proposition 1 : Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. L'intégrale $\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t$ est convergente si et seulement si $\lambda > 0$.

Proposition 2 : L'intégrale $\int_0^1 \ln(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente.

Définition (Intégrale de Riemann) : On appelle intégrale de Riemann toute intégrale de la forme $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ ou de la forme $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ pour $\alpha \in \mathbb{R}$.

Proposition (Convergence d'une intégrale de Riemann) : Soit $\alpha \in \mathbb{R}$.

(i) L'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ est convergente si et seulement si $\alpha > 1$.

(ii) L'intégrale $\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t^\alpha}$ est convergente si et seulement si $\alpha < 1$.

I.C - Propriétés générales des intégrales

On fixe un intervalle $]a,b[$ de $\mathbb{R}$ avec $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$.

Proposition (Linéarité de l'intégrale) : Soient $(\lambda,\mu) \in \mathbb{K}^2$ et $f,g :]a,b[\to \mathbb{R}$ deux fonctions continues. Si les intégrales $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ sont convergentes, alors l'intégrale $\int_a^b \big(\lambda f(t)+\mu g(t)\big)\,\mathrm{d}t$ est convergente et on a la relation

$$\int_a^b \big(\lambda f(t)+\mu g(t)\big)\,\mathrm{d}t = \lambda \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t + \mu \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Proposition (Croissance et positivité de l'intégrale) : Soient $f,g :]a,b[\to \mathbb{R}$ deux fonctions continues.

(i) Positivité de l'intégrale : si f est positive sur I et si l'intégrale $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente, alors $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \geqslant 0$.

(ii) Croissance de l'intégrale : si $f \leqslant g$ sur I et si les intégrales $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ et $\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ sont convergentes, alors on a l'inégalité $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$.

Proposition (Relation de Chasles) : Soit $f :]a,b[\to \mathbb{K}$ une fonction continue et $c \in]a,b[$. L'intégrale $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est convergente si et seulement si les intégrales

$$\int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$$

sont convergentes. Dans ce cas, on a la relation $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

I.D - Intégration par parties et changement de variable

On fixe un intervalle $]a,b[$ de $\mathbb{R}$ avec $-\infty \leqslant a < b \leqslant +\infty$.

Théorème du changement de variable : Soit $\varphi :]c,d[\to]a,b[$ une bijection croissante de classe $\mathscr{C}^1$.
Si $f :]a,b[\to \mathbb{K}$ une fonction continue, alors les intégrales

$$\int_c^d f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$$

sont de mêmes natures. De plus, si les intégrales convergent, alors on a la relation

$$\int_c^d f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Remarques 4 :

a) Il faut s'assurer que les intégrales sont convergentes dans le théorème ci-dessus pour écrire une égalité.

b) Si $\varphi :]c,d[\to]a,b[$ est une bijection décroissante de classe $\mathscr{C}^1$, on a un résultat analogue avec les intégrales

$$\int_c^d f(\varphi(t))\varphi'(t)\,\mathrm{d}t \quad \text{et} \quad \int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x.$$

c) En pratique, le changement de variable s'effectue comme pour une intégrale sur un segment.

Exemple 4 : On considère l'intégrale $I = \int_0^1 \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x$.

La fonction $\varphi : t \mapsto \sin(t)$ est une bijection croissante de classe $\mathscr{C}^1$ de $]0,\pi/2[$ sur $]0,1[$. En effectuant le changement de variable $x = \sin(t)$ dans l'intégrale I, on obtient l'intégrale

$$J = \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2(t)}{\sqrt{1-\sin^2(t)}}\cos(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \sin^2(t)\,\mathrm{d}t.$$

Comme la fonction $t \mapsto \sin^2(t)$ est continue sur $[0,\pi/2]$, l'intégrale J est convergente. On en déduit par le théorème du changement de variable que l'intégrale I est convergente et que

$$I = J = \int_0^{\pi/2} \sin^2(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{\pi/2} \frac{1-\cos(2t)}{2}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{t}{2} - \frac{1}{4}\sin(2t)\right]_0^{\pi/2} = \frac{\pi}{4}.$$

Théorème d'intégration par parties : Soient $f, g :]a, b[\to \mathbb{K}$ deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$. Si les deux limites

$$\lim_{t \to a^+} f(t)g(t) \quad \text{et} \quad \lim_{t \to b^-} f(t)g(t)$$

existent et sont finis, alors les intégrales $\int_a^b f(t)g'(t)\,dt$ et $\int_a^b f'(t)g(t)\,dt$ sont de même nature. De plus, si les intégrales convergent, alors on a la relation

$$\int_a^b f(t)g'(t)\,dt = \left[f(t)g(t)\right]_a^b - \int_a^b f'(t)g(t)\,dt.$$

Remarque 5 : Dans l'énoncé du théorème ci-dessus, la définition du terme entre crochet est

$$\left[f(t)g(t)\right]_a^b = \lim_{t \to b^-} f(t)g(t) - \lim_{t \to a^+} f(t)g(t).$$

Exemple 5 : On considère l'intégrale $I = \int_0^1 2t\ln(t)\,dt$. Les fonctions $f : t \mapsto \ln(t)$ et $g : t \mapsto t^2$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ et on a par croissance comparée que

$$\lim_{t \to 0^+} f(t)g(t) = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{t \to 1^-} f(t)g(t) = 0.$$

On en déduit que les intégrales

$$I = \int_0^1 f(t)g'(t)\,dt = \int_0^1 2t\ln(t)\,dt \quad \text{et} \quad J = \int_0^1 f'(t)g(t)\,dt = \int_0^1 t\,dt$$

sont de même nature. Comme l'intégrale J est convergente, on en déduit que I converge et que

$$\int_0^1 2t\ln(t)\,dt = \left[t^2\ln(t)\right]_0^1 - \int_0^1 t\,dt = (0-0) - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}.$$

Partie II Intégrales de fonctions positives

On fixe un intervalle $[a, b[$ de $\mathbb{R}$ avec $a < b \leqslant +\infty$.

Lemme 1 : Soit $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ une fonction continue et positive. L'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$ est convergente si et seulement si la fonction $\beta \mapsto \int_a^\beta f(t)\,dt$ est majorée sur $[a, b[$.

Si $f : [a, b[\to \mathbb{R}$ et $g : [a, b[\to \mathbb{R}$ sont deux fonctions, on rappelle que l'on dit que la fonction f est dominée par la fonction g au voisinage de b^-, ce que l'on note $f(t) \underset{b^-}{=} O\big(g(t)\big)$, si

$$\exists K \in \mathbb{R}, \quad \forall x \text{ dans un voisinage de } b^-, \quad |f(x)| \leqslant K|g(x)|.$$

Si la fonction g ne s'annule pas au voisinage de b^-, la définition ci-dessus est équivalente à dire que le quotient f/g est une fonction bornée au voisinage de b^-.

Théorème de comparaison : Soient $f, g : [a, b[\to \mathbb{R}$ deux fonctions continues et positives.

(i) Si $0 \leqslant f(t) \leqslant g(t)$ pour tout $t \in [a, b[$, alors la convergence de $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ implique celle de $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

(ii) Si $f(t) \underset{b^-}{=} O\big(g(t)\big)$, alors la convergence de $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ implique celle de $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

(iii) Si $f(t) \underset{b^-}{\sim} g(t)$, alors la convergence de $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$ équivaut à celle de $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$.

Remarques 6 :

a) Sous l'hypothèse du (i), on a en plus l'inégalité $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t \leqslant \int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$.

b) Sous l'hypothèse du (i) ou du (ii), on a par contraposition que la divergence de l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ implique celle de $\displaystyle\int_a^b g(t)\,\mathrm{d}t$.

c) L'assertion (i) reste valable si l'inégalité $0 \leqslant f(t) \leqslant g(t)$ n'est que vérifiée au voisinage de b^-.

d) L'assertion (ii) reste valable si on remplace $f(t) \underset{b^-}{=} O\big(g(t)\big)$ par $f(t) \underset{b^-}{=} o\big(g(t)\big)$.

e) Le théorème s'adapte naturellement à des intégrales de fonctions continues et positives sur $]a, b]$.

Exemples 6 :

a) On souhaite étudier la convergence de l'intégrale $I = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$.

La fonction $t \mapsto \dfrac{\sin^2(t)}{t^2}$ est continue et positive sur $[1, +\infty[$. De plus, on remarque que l'on a l'inégalité

$$\forall t \in [1, +\infty[, \qquad 0 \leqslant \frac{\sin^2(t)}{t^2} \leqslant \frac{1}{t^2}$$

et comme $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ est une intégrale de Riemann convergente, on conclut que I converge par comparaison.

b) On souhaite étudier la convergence de l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\ln(t)}{t^3}\,\mathrm{d}t$.

La fonction $t \mapsto \dfrac{\ln(t)}{t^3}$ est continue et positive sur $[1, +\infty[$. Par croissance comparée, on remarque que

$$\lim_{t \to +\infty} t^2 \left(\frac{\ln(t)}{t^3}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\ln(t)}{t^3} \underset{+\infty}{=} o\left(\frac{1}{t^2}\right).$$

Or $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ est une intégrale de Riemann convergente, donc I converge par comparaison.

c) On souhaite étudier la convergence de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$.

La fonction $t \mapsto \dfrac{\sin(t)}{t}$ est continue sur $]0, 1]$. On remarque que l'on a l'équivalent

$$\frac{\sin(t)}{t} \underset{0^+}{\sim} \frac{t}{t} \underset{0^+}{\sim} 1 \geqslant 0$$

et que $\displaystyle\int_0^1 1\,\mathrm{d}t$ est une intégrale convergente, donc l'intégrale I converge par comparaison.

Partie III Intégrales absolument convergentes et fonctions intégrables

On considère un intervalle non vide I de $\mathbb{R}$ et l'on note $a = \inf(I)$ et $b = \sup(I)$. En particulier, l'intervalle I est nécessairement de la forme $[a,b]$, $[a,b[$, $]a,b]$ ou $]a,b[$.

Définition (Intégrale absolument convergente) : Soit $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue. On dit que $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente si l'intégrale $\displaystyle\int_a^b |f(t)|\,\mathrm{d}t$ est convergente.

Définition (Fonction intégrable) : Une fonction continue $f : I \to \mathbb{K}$ est dite intégrable sur l'intervalle I si l'intégrale $\displaystyle\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ est absolument convergente.

Remarques 7 :

a) Si $f : [a,b[\to \mathbb{K}$ est intégrable sur $[a,b[$, on dit que f est intégrable en b.

b) Si $f :]a,b] \to \mathbb{K}$ est intégrable sur $]a,b]$, on dit que f est intégrable en a.

Exemples 7 :

a) Soit $\lambda \in \mathbb{R}$. La fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-\lambda t}$ est intégrable en $+\infty$ si et seulement si $\lambda > 0$.

b) La fonction $t \mapsto \ln(t)$ est intégrable en 0^+.

c) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ est intégrable en $+\infty$ si et seulement si $\alpha > 1$.

d) Soit $\alpha \in \mathbb{R}$. La fonction $t \mapsto \dfrac{1}{t^\alpha}$ est intégrable en 0^+ si et seulement si $\alpha < 1$.

Théorème 1 : Si une intégrale converge absolument, alors elle converge.

Exemple 8 : On souhaite étudier la convergence de l'intégrale $I = \displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t^2}\,\mathrm{d}t$.
La fonction $t \mapsto \dfrac{\sin(t)}{t^2}$ est continue sur $[1,+\infty[$. On remarque que l'on a l'inégalité

$$\forall t \in [1,+\infty[, \qquad 0 \leqslant \left|\frac{\sin(t)}{t^2}\right| \leqslant \frac{1}{t^2}$$

et comme $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t^2}$ est une intégrale de Riemann convergente, on obtient que l'intégrale I est absolument convergente par comparaison. On conclut par le théorème précédent que l'intégrale I est convergente.

ATTENTION : La réciproque du théorème est fausse. On peut par exemple vérifier que l'intégrale $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t}\,\mathrm{d}t$ est convergente, mais qu'elle ne converge pas absolument.

Notation : Si $f : I \to \mathbb{K}$ est une fonction continue et intégrable sur I, alors on note

$$\int_I f = \int_I f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Proposition 3 (Inégalité triangulaire) : Si $f : I \to \mathbb{K}$ est une fonction intégrable, alors on a l'inégalité

$$\left|\int_I f(t)\,\mathrm{d}t\right| \leqslant \int_I |f(t)|\,\mathrm{d}t.$$

Notation : On désigne l'ensemble des fonctions intégrables sur I à valeurs dans $\mathbb{K}$ par $L^1(I,\mathbb{K})$.

Corollaire 1 : L'ensemble $L^1(I,\mathbb{K})$ est un sous-espace vectoriel de $\mathscr{F}(I,\mathbb{K})$.

Proposition 4 : Si $f : I \to \mathbb{K}$ est continue, positive, intégrable sur I et vérifie $\displaystyle\int_I f(t)\,\mathrm{d}t = 0$, alors f est nulle.

Partie IV Intégration terme à terme

Lorsque l'on considère des fonctions $f_1, \dots, f_n : I \to \mathbb{K}$ intégrables sur I, on a vu que leur somme $f_1 + \cdots + f_n$ est intégrable sur I et que l'on a

$$\int_I \left(\sum_{k=1}^{n} f_k(t)\right)\mathrm{d}t = \sum_{k=1}^{n} \int_I f_k(t)\,\mathrm{d}t.$$

Dans cette partie, nous allons étudier un résultat permettant d'étendre la relation précédente à une somme infinie.

Théorème d'intégration terme à terme : Soient $f : I \to \mathbb{K}$ une fonction continue et $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions intégrables de I dans $\mathbb{K}$ telles que

$$\forall t \in I, \quad f(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} f_n(t).$$

Si la série $\displaystyle\sum \int_I |f_n(t)|\,\mathrm{d}t$ converge, alors la fonction f est intégrable sur I et on a

$$\int_I f(t)\,\mathrm{d}t = \int_I \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(t)\right)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_I f_n(t)\,\mathrm{d}t.$$

DÉMONSTRATION ADMISE

Exemple 9 : Montrons que $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{t\mathrm{e}^{-t}}{1-\mathrm{e}^{-t}}\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2}$. La fonction $f : t \mapsto \dfrac{t\mathrm{e}^{-t}}{1-\mathrm{e}^{-t}}$ est continue sur $]0,+\infty[$. De plus, comme $\mathrm{e}^{-t} \in]0,1[$ pour tout $t \in]0,+\infty[$, on a via la série géométrique que

$$\forall t \in]0,+\infty[, \quad f(t) = \frac{t\mathrm{e}^{-t}}{1-\mathrm{e}^{-t}} = t\mathrm{e}^{-t}\sum_{n=0}^{+\infty} \left(\mathrm{e}^{-t}\right)^n = \sum_{n=0}^{+\infty} \underbrace{t\mathrm{e}^{-(n+1)t}}_{f_n(t)}.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction f_n est continue sur $]0,+\infty[$, puis en utilisant une intégration par parties, on vérifie que f_n est intégrable sur $]0,+\infty[$ et que l'on a

$$\int_0^{+\infty} |f_n(t)|\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \frac{1}{n+1}\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-(n+1)t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{(n+1)^2}.$$

Finalement, la série numérique $\displaystyle\sum_{n\geqslant 0} \int_0^{+\infty} |f_n(t)|\,\mathrm{d}t$ est convergente, donc d'après le théorème d'intégration terme à terme, la fonction f est intégrable et on a

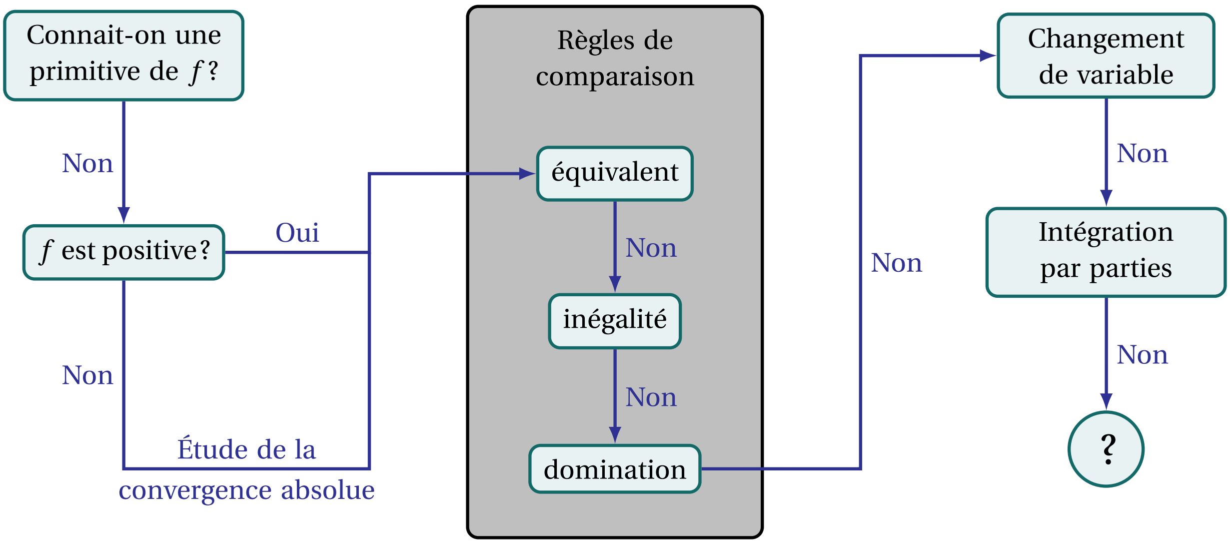
$$\int_0^{+\infty} f(t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} \left(\sum_{n=0}^{\infty} f_n(t)\right)\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \int_0^{+\infty} f_n(t)\,\mathrm{d}t = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{(n+1)^2}.$$

Partie V Méthode - Étudier la convergence d'une intégrale

On souhaite étudier le convergence d'une intégrale $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$ où f est une fonction définie sur un des intervalles

(i) $I = [a,b]$, (ii) $I = [a,b[$, (iii) $I =]a,b]$, (iv) $I =]a,b[$.

1) On détermine si f est continue sur $[a,b]$, $[a,b[$, $]a,b]$ ou $]a,b[$.
2) On distingue trois cas.
   a) Si f est continue sur $[a,b]$ l'intégrale est convergente par les résultats de première année.
   b) Si f n'est que continue sur $]a,b[$, on sépare l'intégrale en deux pour se ramener au cas où seul une des deux extrémités de l'intervalle d'intégration est ouverte.
3) On s'est donc ramené à étudier la convergence d'une intégrale d'une fonction continue f sur $[a,b[$ ou $]a,b]$. Le graphe ci-dessous résume la démarche à suivre pour étudier cette intégrale.



   Si la fonction f n'est pas positive et que l'on a démontré qu'elle ne converge pas absolument, on sort du cadre du programme dans le cas général.
4) Dans le cas où on avait séparé l'intégrale de départ en deux, on conclut (Par définition, l'intégrale converge si chacune des deux intégrales obtenus après la séparation convergent).

Exemple 10 : Étudions la convergence de l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} t\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$.

La fonction $f : t \mapsto t\mathrm{e}^{-t^2}$ est continue sur $[0,+\infty[$. Pour tout $\beta \in [0,+\infty[$, on a

$$\int_0^\beta t\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t = \left[-\frac{1}{2}\mathrm{e}^{-t^2}\right]_0^\beta = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\beta^2} \xrightarrow[\beta\to+\infty]{} \frac{1}{2},$$

donc l'intégrale I converge et sa valeur est $1/2$.

Exemple 11 : Étudions la convergence de l'intégrale $I = \int_1^{+\infty} \frac{2+\cos(t)}{t}\,\mathrm{d}t$.

La fonction $f : t \mapsto \frac{2+\cos(t)}{t}$ est continue sur $[1,+\infty[$. On a l'inégalité $0 \leqslant \frac{1}{t} \leqslant f(t)$ pour tout $t \in [1,+\infty[$ et l'intégrale $\int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{d}t}{t}$ est une intégrale de Riemann divergente, donc I diverge par comparaison.

Exemple 12 : Étudions la convergence de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\cos(t)\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$.

La fonction $f : t \mapsto \dfrac{\cos(t)\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}$ est continue sur $]0,+\infty[$. On doit donc étudier la convergence des deux intégrales

$$I_1 = \int_0^1 \frac{\cos(t)\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad I_2 = \int_1^{+\infty} \frac{\cos(t)\mathrm{e}^{-t}}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t.$$

- On a l'équivalent $f(t) \underset{0^+}{\sim} \dfrac{1}{\sqrt{t}} \geqslant 0$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{t}}\,\mathrm{d}t$ est une intégrale de Riemann convergente, donc l'intégrale I_1 converge absolument par comparaison.
- On a l'inégalité $0 \leqslant |f(t)| \leqslant \mathrm{e}^{-t}$ pour tout $t \in [1,+\infty[$ et l'intégrale $\displaystyle\int_1^{+\infty} \mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$ est une intégrale de référence convergente, donc I_2 converge absolument par comparaison, donc I_2 converge.

Les intégrales I_1 et I_2 convergent, donc l'intégrale I est convergente.

Exemple 13 : Étudions la convergence de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t$.

La fonction $f : t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{t}$ est continue sur $]0,+\infty[$. On doit donc étudier la convergence des deux intégrales

$$I_1 = \int_0^1 \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad I_2 = \int_1^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{t}\,\mathrm{d}t.$$

- On a l'équivalent $f(t) \underset{0^+}{\sim} \dfrac{1}{t} \geqslant 0$ et $\displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{t}\,\mathrm{d}t$ est une intégrale de Riemann divergente, donc l'intégrale I_1 diverge par comparaison.
- Comme l'intégrale I_1 diverge, l'étude de la convergence de I_2 est inutile.

Comme l'intégrale I_1 diverge, on conclut que l'intégrale I diverge.

Exemple 14 : Étudions la convergence de l'intégrale $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\mathrm{d}t}{\sqrt{1-t}}$.

La fonction $f : t \mapsto \dfrac{1}{\sqrt{1-t}}$ est continue sur $[0,1[$. En utilisant le changement de variable $u = 1-t$ dans l'intégrale I, on obtient l'intégrale

$$J = \int_0^1 \frac{\mathrm{d}u}{\sqrt{u}}.$$

L'intégrale J est une intégrale de Riemann convergente, donc l'intégrale I est convergente par le théorème du changement de variable. De plus, on a $I = J$.