CHAPITRE 9

Intégrales dépendant d'un paramètre

Jérôme Von Buhren
http://vonbuhren.free.fr

Lycée Couffignal - PT*

Lorsque l'on considère des fonctions $f_1, \ldots, f_n : A \to \mathbb{K}$ continues (respectivement $\mathscr{C}^1$) sur un intervalle A, on sait que leur somme $g = f_1 + \cdots + f_n$ conserve cette propriété.

Substituons le cadre discret exposé ci-dessus par un cadre continu : les fonctions $f_1, \ldots, f_n$ sont remplacées par une fonction $f : A \times I \to \mathbb{K}$ de sorte que pour tout $t \in I$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ soit continue (respectivement $\mathscr{C}^1$) sur A; tandis que la somme est remplacée par une intégrale en considérant la fonction

$$g : x \mapsto \int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t.$$

Remarquons que sans hypothèses supplémentaires, la fonction g n'est même pas nécessairement définie sur A.

Dans ce chapitre, nous donnerons des conditions suffisantes sur la fonction f pour que la fonction g soit définie et continue (respectivement $\mathscr{C}^1$) sur A. Ces résultats nous permettront notamment d'utiliser de nouvelles méthodes pour calculer certaines intégrales.

Dans tout le chapitre, on désigne par $\mathbb{K}$ le corps $\mathbb{R}$ ou le corps $\mathbb{C}$.

Remarquons que même dans des cas simples, la continuité de la fonction g de l'introduction n'est pas assurée. Par exemple, si on considère

$$f : (x, t) \longmapsto x\mathrm{e}^{-xt}$$

qui est continue sur $\mathbb{R}_+^2$, alors la fonction $g : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad g(x) = \int_0^{+\infty} f(x, t)\,\mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} x\mathrm{e}^{-xt}\,\mathrm{d}t = \begin{cases} 0 & \text{si} \quad x = 0 \\ 1 & \text{si} \quad x > 0 \end{cases}$$

n'est pas continue sur $\mathbb{R}_+$.

Nous avons par contre le résultat suivant.

Théorème de continuité d'une intégrale à paramètre

Soient A et I deux intervalles de $\mathbb{R}$. Soit $f : A \times I \to \mathbb{K}$ une fonction vérifiant les hypothèses suivantes.

(i) Pour tout $t \in I$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est continue sur A.

(ii) Pour tout $x \in A$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue sur I.

(iii) Il existe une fonction $\varphi : I \to \mathbb{R}$ continue et intégrable sur I telle que

$$\forall (x,t) \in A \times I, \quad \left|f(x,t)\right| \leqslant \varphi(t). \qquad \text{(Hypothèse de domination)}$$

La fonction $g : x \mapsto \displaystyle\int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est définie et continue sur l'intervalle A.

Démonstration

Admise

Remarques 1

a) L'hypothèse (i) est dictée par la propriété que l'on souhaite conserver après intégration, l'hypothèse (ii) assure que l'intégrale définissant g puisse avoir un sens et l'hypothèse (iii) impose une condition « technique » pour assurer l'existence et la continuité de g.

b) La fonction φ dans l'hypothèse (iii) ne doit pas dépendre de la variable x.

Exemple 1

Montrons que la fonction $g : x \mapsto \int_0^{+\infty} \cos(xt)\mathrm{e}^{-t^2}\,\mathrm{d}t$ est continue sur $\mathbb{R}$. La fonction $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $f : (x,t) \mapsto \cos(xt)\mathrm{e}^{-t^2}$ vérifie les hypothèses suivantes.

(i) Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, la fonction $x \mapsto \cos(xt)\mathrm{e}^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}$.

(ii) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \cos(xt)\mathrm{e}^{-t^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

(iii) On a la majoration

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \quad \left|f(x,t)\right| \leqslant \mathrm{e}^{-t^2}.$$

et la fonction $\varphi : t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2}$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

On conclut que la fonction g est continue sur $\mathbb{R}$ par le théorème de continuité.

L'hypothèse de domination peut s'avérer trop contraignante à vérifier dans certains cas. Par exemple, le théorème ne peut pas s'appliquer directement pour démontrer la continuité sur $\mathbb{R}_+^*$ de la fonction

$$g : x \mapsto \int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{x+t}\,\mathrm{d}t.$$

Dans ce cas, il peut s'avérer avantageux de vérifier l'hypothèse de domination localement. Plus précisément, si à la place de (iii), on montre que pour tout segment $S \subset A$, il existe une fonction $\varphi : S \to \mathbb{R}$ continue et intégrable sur S telle que

$$\forall (x,t) \in S \times I, \quad \left|f(x,t)\right| \leqslant \varphi(t), \qquad \text{(Hypothèse de domination locale)}$$

alors on en déduit par le théorème que g est continue sur tout segment S inclus dans A. Comme la continuité est une propriété locale, on conclut que la fonction g est continue sur A.

Exemple 2

Montrons que la fonction $g : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{x+t}\,\mathrm{d}t$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. La fonction $f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $f : (x,t) \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{x+t}$ vérifie les hypothèses suivantes.

(i) Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, la fonction $x \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{x+t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

(ii) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{x+t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

Exemple 2

(iii) Pour tout segment $[a, b] \subset \mathbb{R}_+^*$, on a la majoration

$$\forall (x,t) \in [a,b] \times \mathbb{R}_+, \quad \left| \frac{\mathrm{e}^{-t}}{x+t} \right| \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-t}}{a+t}.$$

et la fonction $\varphi : t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{a+t}$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

On en déduit que la fonction g est continue sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$ par le théorème de continuité. Comme la continuité est une propriété locale, on conclut que la fonction g est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

Remarque 2

Si l'intervalle d'intégration I est un segment et que la fonction f est continue sur la partie $A \times I$ de $\mathbb{R}^2$, alors la version locale du théorème de continuité assure que la continuité sur A de la fonction

$$g : x \mapsto \int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t.$$

En effet, les hypothèses (i) et (ii) sont vérifiées. De plus, la version locale de l'hypothèse (iii) est vérifiée : pour tout segment S dans A, comme la fonction f est continue sur la partie fermée et bornée $S \times I$ de $\mathbb{R}^2$, elle est bornée par un réel positif M sur $S \times I$ et la fonction constante $\varphi : t \mapsto M$ est intégrale sur le segment I.

Exemple 3

La fonction $x \mapsto \displaystyle\int_0^{\pi} \frac{\cos(xt)}{1+\sin(t)}\,\mathrm{d}t$ est continue sur $\mathbb{R}$.

On dispose d'un résultat analogue pour la dérivabilité d'une intégrale à paramètre.

Théorème de dérivabilité d'une intégrale à paramètre

Soient A et I deux intervalles de $\mathbb{R}$. Soit $f : A \times I \to \mathbb{K}$ une fonction vérifiant les hypothèses suivantes.

(i) Pour tout $t \in I$, la fonction $x \mapsto f(x,t)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur A.

(ii) Pour tout $x \in A$, la fonction $t \mapsto f(x,t)$ est continue et intégrable sur I.

(iii) Pour tout $x \in A$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ est continue sur I.

Théorème de dérivabilité d'une intégrale à paramètre

(iv) Il existe une fonction $\varphi : I \to \mathbb{R}$ continue et intégrable sur I telle que

$$\forall (x,t) \in A \times I, \quad \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) \right| \leqslant \varphi(t). \qquad \text{(Hypothèse de domination)}$$

La fonction $g : x \mapsto \int_I f(x,t)\,\mathrm{d}t$ est définie et de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'intervalle A.
De plus, on a

$$\forall x \in A, \quad g'(x) = \int_I \frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\,\mathrm{d}t.$$

Démonstration

Admise

Remarques 3

a) L'hypothèse (i) est dictée par la propriété que l'on souhaite conserver après intégration, l'hypothèse (ii) assure l'existence de g, l'hypothèse (iii) assure que l'intégrale sur I de $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$ puisse avoir un sens et l'hypothèse (iv) impose une condition « technique » pour assurer que g est $\mathscr{C}^1$ et l'intégrabilité de $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t)$.

b) La fonction φ dans l'hypothèse (iv) ne doit pas dépendre de la variable x.

Exemple 4

Montrons que la fonction $g : x \mapsto \int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} \mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}\, \mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$. La fonction $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $f : (x,t) \mapsto \mathrm{e}^{-t^2} \mathrm{e}^{itx}$ vérifie les hypothèses suivantes.

(i) Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, la fonction $x \mapsto \mathrm{e}^{-t^2} \mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.

(ii) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2} \mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$. De plus, on a

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \left| \mathrm{e}^{-t^2} \mathrm{e}^{\mathrm{i}tx} \right| = \mathrm{e}^{-t^2} = O\left(\frac{1}{t^2}\right) \text{ lorsque } t \to +\infty,$$

donc la fonction $t \mapsto \mathrm{e}^{-t^2} \mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

(iii) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) = \mathrm{i}t\mathrm{e}^{-t^2} \mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

Exemple 4

(iv) On a la majoration

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \quad \left| \frac{\partial f}{\partial x}(x,t) \right| \leqslant t\mathrm{e}^{-t^2}$$

et la fonction $\varphi : t \mapsto t\mathrm{e}^{-t^2}$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

On conclut que la fonction g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ par le théorème de dérivabilité. De plus, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g'(x) = \int_0^{+\infty} \mathrm{i}t\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}\,\mathrm{d}t.$$

Remarque 4

En utilisant le théorème précédent avec une récurrence, on peut démontrer qu'une fonction définie par une intégrale à paramètre est de classe $\mathscr{C}^\infty$.

Exemple 5

Montrons que la fonction $g : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \mathrm{e}^{-t^2} \mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}\, \mathrm{d}t$ est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$. Plus précisément, on démontre par récurrence pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ la propriété

$\mathscr{P}_n$: « la fonction g est de classe $\mathscr{C}^n$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g^{(n)}(x) = \int_0^{+\infty} (\mathrm{i}t)^n \mathrm{e}^{-t^2} \mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}\, \mathrm{d}t \text{ ».}$$

Exemple 5

- Initialisation : Pour $n = 1$, la propriété $\mathscr{P}_1$ a été démontrée dans l'exemple précédent.
- Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\mathscr{P}_n$ est vraie. Montrons que la propriété $\mathscr{P}_{n+1}$ est vérifiée.
  La fonction $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ définie par $f : (x, t) \mapsto (\mathrm{i}t)^n \mathrm{e}^{-t^2} \mathrm{e}^{itx}$ vérifie les hypothèses suivantes.
  (i) Pour tout $t \in \mathbb{R}_+$, la fonction $x \mapsto (\mathrm{i}t)^n \mathrm{e}^{-t^2} \mathrm{e}^{itx}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
  (ii) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto (\mathrm{i}t)^n \mathrm{e}^{-t^2} \mathrm{e}^{itx}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$. De plus, on a

$$\forall t \in \mathbb{R}_+, \quad \left|(\mathrm{i}t)^n \mathrm{e}^{-t^2} \mathrm{e}^{itx}\right| = t^n \mathrm{e}^{-t^2} = O\left(\frac{1}{t^2}\right) \text{ lorsque } t \to +\infty,$$

  donc la fonction $t \mapsto (\mathrm{i}t)^n \mathrm{e}^{-t^2} \mathrm{e}^{itx}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

Exemple 5

(iii) Pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) = (\mathrm{i}t)^{n+1}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}$ est continue sur $\mathbb{R}_+$.

(iv) On a la majoration

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}_+, \quad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant t^{n+1}\mathrm{e}^{-t^2}$$

et la fonction $\varphi : t \mapsto t^{n+1}\mathrm{e}^{-t^2}$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

On en déduit que la fonction $g^{(n)}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}$ par le théorème de dérivabilité. De plus, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad g^{(n+1)}(x) = \int_0^{+\infty} (\mathrm{i}t)^{n+1}\mathrm{e}^{-t^2}\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx}\,\mathrm{d}t.$$

On a démontré la propriété $\mathscr{P}_{n+1}$.

Exemple 5

Finalement, on a prouvé par récurrence que la fonction g est de classe $\mathscr{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}$ et que

$$\forall n \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad g^{(n)}(x) = \int_0^{+\infty} (\mathrm{i}t)^n \mathrm{e}^{-t^2} \mathrm{e}^{\mathrm{i}tx} \, \mathrm{d}t.$$

Comme pour le théorème de continuité, il peut s'avérer utile de vérifier l'hypothèse de domination localement. Plus précisément, si à la place de (iv), on montre que pour tout segment $S \subset A$, il existe une fonction $\varphi : S \to \mathbb{R}$ continue et intégrable sur S telle que

$$\forall (x,t) \in S \times I, \quad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| \leqslant \varphi(t), \qquad \text{(Hypothèse de domination locale)}$$

alors on en déduit par le théorème que g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur tout segment S inclus dans A. Comme la dérivabilité et la continuité sont des propriétés locales, on conclut que la fonction g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur A.

Exemple 6

Montrons que $g : x \mapsto \displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{x+t}\,dt$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

La fonction $f : (x,t) \mapsto \dfrac{e^{-t}}{x+t}$ vérifie les hypothèses suivantes.

(i) Pour tout $t \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction $x \mapsto \dfrac{e^{-t}}{x+t}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.

(ii) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction $t \mapsto \dfrac{e^{-t}}{x+t}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, on a

$$\left|\frac{e^{-t}}{x+t}\right| = O\left(\frac{1}{t^2}\right) \text{ lorsque } t \to +\infty,$$

donc la fonction $t \mapsto \dfrac{e^{-t}}{x+t}$ est intégrable sur $\mathbb{R}_+^*$.

Exemple 6

(iii) Pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, la fonction $t \mapsto \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,t) = -\dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{(x+t)^2}$ est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.

(iv) Pour tout segment $[a,b] \subset \mathbb{R}_+^*$, on a la majoration

$$\forall (x,t) \in [a,b] \times \mathbb{R}_+, \quad \left|\frac{\partial f}{\partial x}(x,t)\right| = \frac{\mathrm{e}^{-t}}{(x+t)^2} \leqslant \frac{\mathrm{e}^{-t}}{(a+t)^2}.$$

et la fonction $\varphi : t \mapsto \dfrac{\mathrm{e}^{-t}}{(a+t)^2}$ est continue et intégrable sur $\mathbb{R}_+$.

On en déduit que la fonction g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur tout segment de $\mathbb{R}_+^*$ par le théorème de dérivabilité. Comme la dérivabilité et la continuité sont des propriétés locales, on conclut que la fonction g est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad g'(x) = -\int_0^{+\infty} \frac{\mathrm{e}^{-t}}{(x+t)^2}\,\mathrm{d}t.$$