

TD 9 Intégrales dépendant d'un paramètre

Exercice 1 : On considère la fonction d'une variable réelle

$$g : x \mapsto \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t} dt.$$

1. Montrer que g est définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Montrer que g est continue sur $[a, +\infty[$.
3. En déduire que g est continue sur $\mathbb{R}_+^*$.
4. Montrer que $g(x) + g(x+1) = 1/x$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.
5. Déterminer un équivalent de g en 0^+ et la limite de g en $+\infty$.

Exercice 2 : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on considère la fonction $\varphi_n : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad \varphi_n(x) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{(x^2 + t^2)^{n+1}}.$$

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, la fonction φ_n est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que φ_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, b]$ pour tout $0 < a < b$, puis en déduire que φ_n est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. Déterminer une relation entre φ_{n+1} et φ'_n pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. En déduire que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$$\varphi_n(x) = \frac{(2n)!}{2^{2n+1}(n!)^2} \cdot \frac{\pi}{x^{2n+1}}.$$

Exercice 3 : On considère la fonction $f : \mathbb{R}_+^* \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad f(x) = \int_0^1 \frac{t^{x-1} - 1}{\ln(t)} dt.$$

1. Montrer que f est bien définie sur $\mathbb{R}_+^*$.
2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$, puis en déduire que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$ et calculer $f'(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.
3. En déduire une expression explicite de $f(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.

Exercice 4 - Intégrale de Gauss : On définit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ par

$$f(x) = \int_0^x e^{-t^2} dt \quad \text{et} \quad g(x) = \int_0^1 \frac{e^{-(1+t^2)x^2}}{1+t^2} dt.$$

1. Montrer que les fonctions f et g sont de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que $f(x)^2 + g(x) = \pi/4$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
3. En déduire que l'on a

$$\int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}.$$

Exercice 5 : On considère la fonction $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-xt^2}}{1+t^2} dt.$$

1. Montrer que la fonction f est bien définie et continue sur $\mathbb{R}_+$.
2. Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[a, +\infty[$ pour tout $a > 0$, puis en déduire que f est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}_+^*$.
3. En utilisant les résultats de l'exercice 4, montrer que f est l'unique solution de l'équation différentielle

$$y - y' = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{x}}$$

sur $\mathbb{R}_+^*$ admettant une limite nulle en $+\infty$.

4. Montrer que la fonction f n'est pas dérivable en 0.

Exercice 6 - Transformée de Fourier : On définit la transformée de Fourier de toute fonction continue et intégrable $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t) e^{-ixt} dt.$$

1. Soit $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$ une fonction continue et intégrable. Montrer que $\hat{f}$ est définie, continue et bornée sur $\mathbb{R}$.
2. On considère la fonction $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par $f(t) = e^{-t^2}$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
 - (a) Montrer que $\hat{f}$ est de classe $\mathcal{C}^1$ sur $\mathbb{R}$.
 - (b) Montrer que $\hat{f}$ est solution d'une équation différentielle d'ordre 1.
 - (c) En utilisant les résultats de l'exercice 4, déterminer une expression explicite de $\hat{f}(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 7 - Fonction Gamma : On définit la fonction Γ d'une variable réelle par

$$\Gamma : x \mapsto \int_0^{+\infty} t^{x-1} e^{-t} dt.$$

1. Montrer que la fonction Γ est définie et continue sur $]0, +\infty[$.
2. Montrer que la fonction Γ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]0, +\infty[$ et que

$$\forall p \in \mathbb{N}, \quad \forall x \in]0, +\infty[, \quad \Gamma^{(p)}(x) = \int_0^{+\infty} \ln^p(t) e^{-t} t^{x-1} dt.$$

3. Montrer que $\Gamma(x+1) = x\Gamma(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$.
4. En déduire la valeur de $\Gamma(n)$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
5. Déterminer un équivalent de Γ en 0^+ .
6. En utilisant les résultats de l'exercice 4, calculer $\Gamma(1/2)$.

Exercice 8 : On considère la fonction d'une variable réelle

$$f : x \mapsto \int_0^{+\infty} e^{-t^2} \sin(tx) dt.$$

1. Montrer que l'ensemble de définition de la fonction f est $\mathbb{R}$.
2. Montrer que f est dérivable sur $\mathbb{R}$ et qu'elle est solution d'une équation différentielle d'ordre 1.
3. En déduire que l'on a la relation

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{1}{2} e^{-x^2/4} \int_0^x e^{t^2/4} dt.$$

Exercice 9 : On considère la fonction $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}_+, \quad f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{e^{-t}}{1+tx} dt.$$

1. Montrer que la fonction f est bien définie sur $\mathbb{R}_+$.
2. Montrer que la fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $\mathbb{R}_+$.
3. Calculer $f^{(n)}(0)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
4. La fonction f est-elle développable en série entière?

Exercice 10 - Intégrale de Dirichlet : Soient $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définies par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_0^{+\infty} \frac{\cos(xt)}{1+t^2} dt \quad \text{et} \quad g(x) = \int_0^{+\infty} \frac{1 - \cos(xt)}{t^2(1+t^2)} dt.$$

1. Montrer que les fonctions f et g sont bien définies sur $\mathbb{R}$.
2. Montrer que g est de classe $\mathcal{C}^2$ sur $\mathbb{R}$ et que $g'' = f$.
3. Montrer que l'on a la relation

$$\forall x \in \mathbb{R}_+^*, \quad g''(x) - g(x) = \frac{\pi}{2} - Ix \quad \text{avec} \quad I = \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2(t)}{t^2} dt.$$

4. En déduire une expression de $f(x)$ et de $g(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, puis de I .