

CHAPITRE 7

Fonctions vectorielles

Jérôme VON BUHREN
<http://vonbuhren.free.fr>

Lycée Couffignal - PT*

Dans ce chapitre, nous allons étendre les notions d'analyse de première année étudiée pour une fonction à valeurs réelles au cadre de fonctions à valeurs vectorielles (i.e. à valeurs dans $\mathbb{R}^n$).

Dans tout le chapitre, on fixe un entier $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geq 2$ et un intervalle I contenant au moins deux points.

Toute fonction vectorielle $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ s'écrit de manière unique sous la forme

$$f = (f_1, \dots, f_n) \quad \text{avec} \quad f_1, \dots, f_n : I \rightarrow \mathbb{R}.$$

Exemple 1

La fonction vectorielle $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ définie par $f : t \mapsto (\cos(t), \sin(t))$ s'écrit $f = (f_1, f_2)$ où les deux fonctions $f_1 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ et $f_2 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ sont définies par $f_1 : t \mapsto \cos(t)$ et $f_2 : t \mapsto \sin(t)$.

Remarque 1

En général, on note $f = (x, y)$ lorsque $n = 2$ et $f = (x, y, z)$ lorsque $n = 3$.

Définition (Limite en un point)

Soit $f = (f_1, \dots, f_n) : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction vectorielle.

On dit que f admet pour limite le n -uplet $\ell = (\ell_1, \dots, \ell_n) \in \mathbb{R}^n$ en un point $a \in I$ si

$$\forall k \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \lim_{t \rightarrow a} f_k(t) = \ell_k.$$

Dans ce cas, on note $\lim_{t \rightarrow a} f(t) = \ell$.

Exemple 2

Par définition, on a $\lim_{t \rightarrow 0} \begin{pmatrix} t^2 - t + 1 \\ t^2 + t + 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Définition (Continuité d'une fonction vectorielle)

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction vectorielle.

- (i) On dit que la fonction f est continue en un point $a \in I$ si $\lim_{t \rightarrow a} f(t) = f(a)$.
- (ii) On dit que la fonction f est continue sur I si f est continue en tout point de I .

Théorème 1 (Caractérisation de la continuité)

Soit $f = (f_1, \dots, f_n) : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction vectorielle.

- (i) La fonction f est continue en un point $a \in I$ si et seulement si les fonctions $f_1, \dots, f_n$ sont continues en a .
- (ii) La fonction f est continue sur I si et seulement si les fonctions $f_1, \dots, f_n$ sont continues sur I .

Exemple 3

La fonction vectorielle de l'exemple 1 est continue sur $\mathbb{R}$ car les fonctions $f_1 = \cos$ et $f_2 = \sin$ sont continues sur $\mathbb{R}$.

Définition (Dérivabilité d'une fonction vectorielle)

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction vectorielle.

- (i) On dit que la fonction f est dérivable en un point $a \in I$ si le taux d'accroissement

$$t \mapsto \frac{f(t) - f(a)}{t - a}$$

admet une limite finie lorsque $t \rightarrow a$. Dans ce cas, la limite est notée $f'(a)$ et s'appelle le vecteur dérivé de f en a .

- (ii) On dit que f la fonction est dérivable sur I si f est dérivable en tout point de I . Dans ce cas, on appelle la fonction $f' : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ définie par $f' : t \mapsto f'(t)$ la fonction dérivée de f .

Théorème 2 (Caractérisation de la dérivabilité)

Soit $f = (f_1, \dots, f_n) : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction vectorielle.

- (i) La fonction f est dérivable en un point $a \in I$ si et seulement si les fonctions $f_1, \dots, f_n$ sont dérivables en a . Dans ce cas, on a l'égalité $f'(a) = (f'_1(a), \dots, f'_n(a))$.
- (ii) La fonction f est dérivable sur I si et seulement si les fonctions $f_1, \dots, f_n$ sont dérivables sur I .

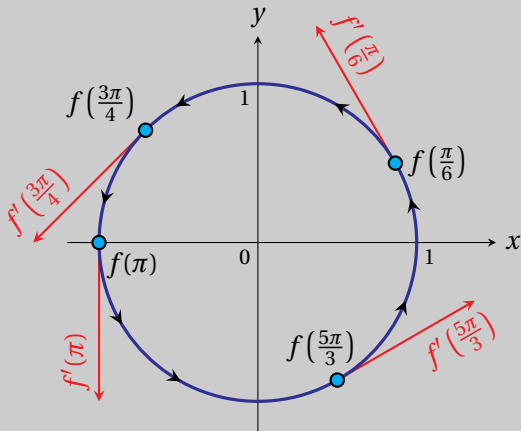
Exemple 4

La fonction vectorielle de l'exemple 1 est dérivable sur $\mathbb{R}$ car les fonctions $f_1 = \cos$ et $f_2 = \sin$ sont dérivables sur $\mathbb{R}$.

De plus, on a $f'(t) = (-\sin(t), \cos(t))$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

Illustration

Si le déplacement d'un objet dans $\mathbb{R}^n$ est décrit par une fonction vectorielle $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ dérivable, alors $f'(a)$ représente le vecteur vitesse de l'objet à la position $f(a)$. En reprenant l'exemple 1, on a la figure suivante.



Proposition 1

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $g : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ deux fonctions vectorielles dérivables.

- (i) Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, la fonction vectorielle $f + \lambda g$ est dérivable sur I et on a $(f + \lambda g)' = f' + \lambda g'$.
- (ii) Si $\lambda : I \rightarrow \mathbb{R}$ est dérivable, alors la fonction vectorielle λf est dérivable sur I et on a $(\lambda f)' = \lambda' f + \lambda f'$.
- (iii) Si $\varphi : J \rightarrow I$ est une fonction dérivable sur un intervalle J de $\mathbb{R}$, alors la fonction vectorielle $f \circ \varphi$ est dérivable sur J et on a $(f \circ \varphi)' = \varphi' \times (f' \circ \varphi)$.
- (iv) L'application produit scalaire $\varphi : t \mapsto \langle f(t) | g(t) \rangle$ est dérivable et on a

$$\forall t \in I, \quad \varphi'(t) = \langle f'(t) | g(t) \rangle + \langle f(t) | g'(t) \rangle.$$

- (v) Si $n = 3$, l'application produit vectoriel $\varphi : t \mapsto f(t) \wedge g(t)$ est dérivable et on a

$$\forall t \in I, \quad \varphi'(t) = f'(t) \wedge g(t) + f(t) \wedge g'(t).$$

Comme pour les fonctions à valeurs réelles, on peut définir les dérivées successives d'une fonction vectorielle par récurrence. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on dit que $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ est k fois dérivable si

$$\forall p \in \llbracket 1, k \rrbracket, \quad \text{la fonction } f^{(p-1)} \text{ est dérivable et on note } f^{(p)} = (f^{(p-1)})'.$$

Dans ce cas, on appelle $f^{(k)} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ la k -ième dérivée de la fonction f . Par convention, on a $f^{(0)} = f$.

Définition (Fonction vectorielle de classe $\mathcal{C}^k$)

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction vectorielle.

- (i) Soit $k \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$. Une fonction $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ est dite de classe $\mathcal{C}^k$ sur I si elle est dérivable k -fois sur I et si sa dérivée k -ième $f^{(k)}$ est continue sur I .
- (ii) On dit que f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I si elle est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I pour tout $k \in \mathbb{N}$.

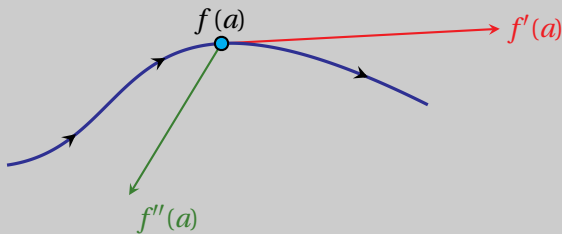
Théorème 3 (Caractérisation des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$)

Soit $f = (f_1, \dots, f_n) : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction vectorielle.

- (i) Soit $k \in \mathbb{N}$. La fonction est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I si et seulement si les fonctions $f_1, \dots, f_n$ sont de classes $\mathcal{C}^k$ sur I . Dans ce cas, on a $f^{(k)} = (f_1^{(k)}, \dots, f_n^{(k)})$.
- (ii) La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur I si et seulement si les fonctions $f_1, \dots, f_n$ sont de classes $\mathcal{C}^\infty$ sur I .

Remarque 2

Si le déplacement d'un objet dans $\mathbb{R}^n$ est décrit par une fonction vectorielle $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe $\mathcal{C}^2$, alors $f''(a)$ représente le vecteur d'accélération de l'objet à la position $f(a)$.



Proposition 2

Soient $f: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $g: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ des fonctions vectorielles de classe $\mathcal{C}^k$ sur I avec $k \in \mathbb{N}$.

Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, la fonction vectorielle $f + \lambda g$ est de classe $\mathcal{C}^k$ sur I et on a $(f + \lambda g)^{(k)} = f^{(k)} + \lambda g^{(k)}$.

Formule de Leibniz

Soit $k \in \mathbb{N}$. Si $f: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ et $\lambda: I \rightarrow \mathbb{R}$ sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^k$, alors la fonction λf est de classe $\mathcal{C}^k$ et on a

$$(\lambda f)^{(k)} = \sum_{p=0}^k \binom{k}{p} \lambda^{(p)} f^{(k-p)}.$$

Définition (Relation de négligeabilité)

Soient $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction vectorielle et $\lambda : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle ne s'annulant pas sur un voisinage d'un point $a \in I$ (sauf éventuellement en a). On dit que f est négligeable devant λ en un point $a \in I$, ce que l'on note $f(t) \underset{t \rightarrow a}{=} o(\lambda(t))$, si

$$\lim_{\substack{t \rightarrow a \\ t \neq a}} \frac{f(t)}{\lambda(t)} = 0.$$

Théorème 4 (Caractérisation de la négligeabilité)

Soient $f = (f_1, \dots, f_n) : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction vectorielle et $\lambda : I \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction réelle ne s'annulant pas sur un voisinage d'un point $a \in I$ (sauf éventuellement en a). La fonction f est négligeable devant λ en un point $a \in I$ si et seulement si les fonctions $f_1, \dots, f_n$ sont négligeables devant λ au point $a \in I$.

Définition (Développement limité)

Soit $f : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction vectorielle. La fonction vectorielle f admet un développement limité en un point $a \in I$ à l'ordre $k \in \mathbb{N}$ s'il existe des vecteurs $v_0, \dots, v_k \in \mathbb{R}^n$ tels que

$$f(a+t) \underset{t \rightarrow 0}{=} v_0 + v_1 t + \dots + v_k t^k + o(t^k).$$

Remarques 3

- a) Si le développement limité de f au point a à l'ordre k existe, alors il est unique.
- b) La fonction f admet un développement limité en a à l'ordre k si et seulement si chacune des composantes de la fonction f en admet un.
- c) En pratique, on calcule le développement limité d'une fonction vectorielle composante par composante.

Exemple 5

Avec la fonction vectorielle de l'exemple 1, on a

$$f(t) = \begin{pmatrix} \cos(t) \\ \sin(t) \end{pmatrix} \underset{t \rightarrow 0}{=} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} -1/2 \\ 0 \end{pmatrix} t^2 + \begin{pmatrix} 0 \\ -1/6 \end{pmatrix} t^3 + o(t^3).$$

Formule de Taylor-Young

Soient $k \in \mathbb{N}$ et $a \in I$. Si $f: I \rightarrow \mathbb{R}^n$ une fonction vectorielle de classe $\mathcal{C}^k$, alors

$$f(a+t) \underset{t \rightarrow 0}{=} f(a) + \frac{f'(a)}{1!}t + \frac{f''(a)}{2!}t^2 + \dots + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}t^k + o(t^k).$$

Remarque 4

Par unicité du développement limité d'une fonction, on en déduit que si f est une fonction vectorielle de classe $\mathcal{C}^k$, alors les vecteurs v_i de la définition d'un développement limité sont donnés par

$$\forall p \in \llbracket 0, k \rrbracket, \quad v_p = \frac{f^{(p)}(a)}{p!}.$$