TD 7 Fonctions vectorielles

Partie I Révisions - Fonctions réelles d'une variable réelle

I.A - Généralités

Exercice 1 : On considère la fonction d'une variable réelle définie par

$$f : x \mapsto \ln\left(\sqrt{x^2+1}+x\right).$$

Montrer que f est définie sur $\mathbb{R}$ et étudier sa parité.

Exercice 2 : Étudier la parité de la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \frac{e^x - 1}{e^x + 1}.$$

Exercice 3 : Montrer que toute fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ s'écrit de manière unique comme la somme d'une fonction paire et d'une fonction impaire.

Exercice 4 : Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Si f est paire, que peut-on dire sur la parité de f' ?
2. Si f est impaire, que peut-on dire sur la parité de f' ?

Exercice 5 : On considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = |\cos(x)\sin(x)|.$$

1. Montrer que la fonction f est périodique.
2. Déterminer sa plus petite période strictement positive.

I.B - Limites et continuité

Exercice 6 : On considère la fonction $f : \mathbb{R} \setminus \{-1\} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}, \quad f(x) = \frac{x+1}{x^3+1}.$$

Montrer que f se prolonge à $\mathbb{R}$ en une fonction continue.

Exercice 7 : Étudier si les fonctions $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ définies ci-dessous se prolonge à $\mathbb{R}$ par continuité.

$$(i) \;\; f : x \mapsto \sin(x)\sin\left(\frac{1}{x}\right), \qquad (ii) \;\; g : x \mapsto \cos(x)\cos\left(\frac{1}{x}\right).$$

I.C - Dérivabilité

Exercice 8 : Déterminer l'ensemble de définition et l'ensemble de dérivabilité de la fonction f dans chacun des cas suivants.

$$(i) \;\; f : x \mapsto \frac{x}{1+|x|}, \quad (ii) \;\; f : x \mapsto \sqrt{x^2 - x^3}, \quad (iii) \;\; f : x \mapsto (x-1)\operatorname{Arccos}\left(x^2\right).$$

Exercice 9 : Soit $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ la fonction définie par

$$\forall x \in \mathbb{R}^*, \quad f(x) = \frac{1}{x} - \frac{\cos(x)}{e^x - 1}.$$

Montrer que f se prolonge à $\mathbb{R}$ en une fonction dérivable.

Exercice 10 : En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que

$$\forall x \in]0,1[, \quad x < \operatorname{Arcsin}(x) < \frac{x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Exercice 11 : Soit $f : [0, \pi/2] \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f : x \mapsto \sqrt{\sin(x)} + x$.

1. Montrer que f réalise une bijection de $[0, \pi/2]$ sur un intervalle I à préciser.
2. Montrer que f^{-1} est dérivable sur I.

Partie II Fonctions vectorielles

Exercice 12 : Soit $f : I \to \mathbb{R}^2$ une fonction vectorielle de classe $\mathscr{C}^2$ décrivant le déplacement d'un point dans le plan. On suppose que f' et f'' ne s'annule pas sur I.

1. Montrer que le point se déplace à vitesse constante si et seulement si le vecteur d'accélération et le vecteur vitesse sont orthogonaux.
2. Montrer que le point accélère si et seulement si l'angle entre le vecteur d'accélération et le vecteur vitesse est dans $[-\pi/2, \pi/2]$.
3. Montrer que le point décélère si et seulement si l'angle entre le vecteur d'accélération et le vecteur vitesse est dans $[\pi/2, 3\pi/2]$.

Exercice 13 : Soit $f : I \to \mathbb{R}^3$ une fonction vectorielle de classe $\mathscr{C}^2$ telle que

$$\forall t \in I, \quad f''(t) \in \mathrm{Vect}(f(t)).$$

1. Montrer que l'application $t \mapsto f(t) \wedge f'(t)$ est constante.
2. On suppose qu'il existe $a \in I$ tel que $f(a)$ et $f'(a)$ ne sont pas colinéaires. Montrer que les valeurs prises par $f(t)$ sont contenues dans un plan.
3. On suppose que f ne s'annule pas et qu'il existe $a \in I$ tel que $f(a)$ et $f'(a)$ soient colinéaires. Montrer que l'image de f est contenue dans une droite.

Exercice 14 : Soit $f : I \to \mathbb{R}^3$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$. On suppose qu'il existe un vecteur $v \in \mathbb{R}^3$ tel que

$$\forall t \in I, \quad f'(t) = f(t) \wedge v.$$

1. Montrer que l'ensemble $f(I)$ est inclus dans un plan de $\mathbb{R}^3$.
2. Montrer que l'ensemble $f(I)$ est inclus dans un cercle.
3. Montrer que l'application $t \mapsto \|f'(t)\|$ est constante.

Exercice 15 - Wronskien : Soient $f : I \to \mathbb{R}^2$ et $g : I \to \mathbb{R}^2$ deux fonctions vectorielles de classe $\mathscr{C}^1$.

1. Montrer que l'application $\varphi : t \mapsto \det_{\mathscr{C}}(f(t), g(t))$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et que
$$\forall t \in I, \quad \varphi'(t) = \det_{\mathscr{C}}(f'(t), g(t)) + \det_{\mathscr{C}}(f(t), g'(t)).$$
2. Soient $a : I \to \mathbb{R}$ et $b : I \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues. On considère deux solutions $y_1 : I \to \mathbb{R}$ et $y_2 : I \to \mathbb{R}$ de l'équation différentielle
$$y'' = ay' + by.$$
Déduire de la question précédente que la fonction $w : I \to \mathbb{R}$ définie par
$$\forall t \in I, \quad w(t) = \begin{vmatrix} f(t) & f'(t) \\ g(t) & g'(t) \end{vmatrix}$$
est solution d'une équation différentielle linéaire d'ordre 1.

Exercice 16 : Calculer des développements limités à l'ordre 4 des fonctions vectorielles suivantes.

(i) $f(t) = \left((1-t)^{-1}, (1+t)^{-1}\right)$ en 0, (ii) $f(t) = \left(\sin^2(t), \sqrt{1-t^2}\right)$ en 0,

(iii) $f(t) = \left(\dfrac{\mathrm{Arctan}(t)}{\tan(t)}, \dfrac{\mathrm{sh}(t)}{\sin(t)}\right)$ en 0, (iv) $f(t) = \left(\ln^2(t), t^t\right)$ en 1,

(v) $f(t) = \left(\mathrm{e}^{\sin(\pi t)}, t^4\right)$ en 1, (vi) $f(t) = \left(\sin(t)\exp(t), \sin^3(t)\right)$ en π.