TD 8 Fonctions de plusieurs variables

Partie I Limite et continuité

Exercice 1 : Étudier la limite en $(0,0)$ des fonctions suivantes.

$$(i)\ f(x,y) = x\sin\left(\frac{1}{x^2+y^2}\right), \qquad (ii)\ f(x,y) = \frac{xy}{x^4+y^4},$$

$$(iii)\ f(x,y) = \frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}, \qquad (iv)\ f(x,y) = \frac{1-\cos(xy)}{xy^2}.$$

Exercice 2 : Soit $(a,b)\in\mathbb{R}_+^2$. On considère l'application $f:\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}^*\to\mathbb{R}$ définie par

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}^*,\quad f(x,y) = \frac{|x|^a|y|^b}{x^2+y^2}.$$

Étudier la limite de f en $(0,0)$ en fonction des valeurs de a et b.

Exercice 3 : Montrer que l'application $f:\mathbb{R}^2\setminus\{(0,0)\}\to\mathbb{R}$ définie par

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad f(x,y) = \frac{3x^2+xy}{\sqrt{x^2+y^2}}.$$

se prolonge à $\mathbb{R}^2$ en une fonction continue.

Exercice 4 : Soit $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$. Étudier la continuité de l'application $F:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ définie par

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad F(x,y) = \begin{cases} \dfrac{f(x)-f(y)}{x-y} & \text{si } x\neq y \\ f'(x) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Partie II Dérivées partielles

II.A - Généralités

Exercice 5 : On définit l'application $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ par

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2}{(x^2+y^2)^{3/4}} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0). \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue sur $\mathbb{R}^2$.
2. La fonction f admet-elle des dérivées partielles sur $\mathbb{R}^2$?

Exercice 6 : On définit l'application $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ par

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2,\quad f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y)=(0,0). \end{cases}$$

1. Montrer que f n'est pas continue en $(0,0)$.
2. Montrer que f admet des dérivées partielles en $(0,0)$.

Exercice 7 : On définit l'application $f:\mathbb{R}^*\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ par

$$\forall (x,y)\in\mathbb{R}^*\times\mathbb{R},\quad f(x,y) = x(x+y)\sin\left(\frac{1}{x}\right).$$

1. Montrer que f se prolonge à $\mathbb{R}^2$ en une fonction continue.
2. Étudier l'existence des dérivées partielles de f sur $\mathbb{R}^2$.

II.B - Dérivée selon un vecteur

Exercice 8 : On définit l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{y^2}{x} & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Montrer que f admet des dérivées suivant tout vecteur en $(0,0)$.
2. Montrer que f n'est pas continue en $(0,0)$.

Exercice 9 : On définit l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par

$$f(x,y) = \begin{cases} y^2 \ln(|x|) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

1. Montrer que f admet des dérivées suivant tout vecteur en $(0,0)$.
2. Montrer que f n'est pas continue en $(0,0)$.

Exercice 10 : On définit l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon .} \end{cases}$$

1. Montrer que f admet des dérivées suivant tout vecteur en $(0,0)$.
2. Montrer que f n'est pas continue en $(0,0)$.

II.C - Fonctions de classe $\mathscr{C}^1$

Exercice 11 : Étudier si l'application suivante est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y^3}{x^2 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exercice 12 : Étudier si l'application suivante est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = \begin{cases} x\dfrac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Exercice 13 : On considère l'application $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \quad f(x,y) = \left(x^2 - y^2\right) \ln\left(x^2 + y^2\right).$$

Montrer que f se prolonge à $\mathbb{R}^2$ en une fonction de classe $\mathscr{C}^1$.

Exercice 14 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$.

1. Soit $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Calculer la dérivée de la fonction $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad F(t) = f(x+t, y+t) - f(x,y).$$

2. Montrer que la fonction f vérifie la relation

$$\forall (x,y,t) \in \mathbb{R}^3, \quad f(x+t, y+t) = f(x,y).$$

si et seulement si f est solution de l'équation aux dérivées partielles

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = 0.$$

II.D - Fonctions de classe $\mathscr{C}^2$

Exercice 15 : Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ vérifiant

$$(i) \left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) & = & y\mathrm{e}^{xy}+3 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) & = & x\mathrm{e}^{xy}, \end{array} \right. \qquad (ii) \left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) & = & \mathrm{e}^{x}y \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) & = & \mathrm{e}^{x}+2y, \end{array} \right.$$

$$(iii) \left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) & = & \sin(xy) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) & = & \cos(xy), \end{array} \right. \qquad (iv) \left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) & = & \mathrm{e}^{x}+y\cos(xy) \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) & = & x\cos(xy). \end{array} \right.$$

Exercice 16 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ l'application définie par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = \left\{ \begin{array}{ll} \dfrac{xy^3}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{sinon.} \end{array} \right.$$

1. Montrer que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$.
2. Calculer les dérivées partielles $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$.
3. L'application f est-elle de classe $\mathscr{C}^2$?

Exercice 17 : Montrer que l'application $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \quad f(x,y) = xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$$

se prolonge à $\mathbb{R}^2$ en une fonction de classe $\mathscr{C}^1$, mais pas de classe $\mathscr{C}^2$.

Partie III Équations aux dérivées partielles

Exercice 18 : Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ vérifiant

$$\frac{\partial f}{\partial x} - 3\frac{\partial f}{\partial y} = 0. \qquad (E)$$

On pourra utiliser le changement de variables $(u,v) = (2x+y, 3x+y)$.

Exercice 19 : Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ vérifiant

$$3\frac{\partial f}{\partial x} - 2\frac{\partial f}{\partial y} = f. \qquad (E)$$

On pourra utiliser le changement de variables $(u,v) = (x+y, 2x+3y)$.

Exercice 20 : Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ vérifiant

$$y\frac{\partial f}{\partial x} - x\frac{\partial f}{\partial y} = f. \qquad (E)$$

On pourra utiliser les coordonnées polaires.

Exercice 21 : Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ vérifiant

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = \sqrt{x^2+y^2}. \qquad (E)$$

On pourra utiliser les coordonnées polaires.

Exercice 22 - Équation des ondes : Soit $c \in \mathbb{R}^*$ une constante fixée. Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ vérifiant

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}.$$

On pourra utiliser le changement de variables $(u,v) = (x+ct, x-ct)$.

Exercice 23 : Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ vérifiant

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}_+^*, \quad x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x,y) - y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y) = 0.$$

On pourra utiliser le changement de variables $(u,v) = (xy, x/y)$.

Partie IV Extremums d'une fonction de deux variables

IV.A - Étude des extremums locaux

Exercice 24 : Étudier les extremums locaux des fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ suivantes.

(i) $f(x,y) = x^2 + 2y^2 - 2xy - 2y$, (ii) $f(x,y) = x^2 + y^2 + 4xy - 2$,

(iii) $f(x,y) = 3xy - x^3 - y^3$, (iv) $f(x,y) = x^4 + y^4 - 4(x-y)^2$.

Exercice 25 : On considère la fonction $f : (\mathbb{R}_+^*)^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall (x,y) \in (\mathbb{R}_+^*)^2, \quad f(x,y) = x\ln(y) - y\ln(x).$$

1. En utilisant une étude de fonction, montrer que l'équation $t - \ln(t) - t^{-1} = 0$ admet une unique solution $t \in \mathbb{R}_+^*$ que l'on déterminera.
2. Étudier les extremums locaux de la fonction f.

Exercice 26 : On considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = x^2 y + \ln\left(1 + y^2\right).$$

Montrer que f admet un point col en $(0,0)$.

Exercice 27 : On considère la fonction $f : [-1,1] \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall (x,y) \in [-1,1] \times \mathbb{R}, \quad f(x,y) = x^2 - \sqrt{1-x^2}\cos(y).$$

1. Déterminer les points critiques de l'application f sur $]-1,1[\times\mathbb{R}$.
2. Déterminer la nature de chaque point critique de l'application f.

IV.B - Extremums globaux sur une partie fermée bornée

Exercice 28 : Déterminer les extremums globaux de $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = 2x^2 + 2y^2 - xy - x - y.$$

Exercice 29 : Déterminer les extremums globaux de $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = x - y + x^3 + y^3.$$

Exercice 30 : Déterminer les extremums globaux de $f : T \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = xy(1-x-y)$$

avec $T = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \geqslant 0,\ y \geqslant 0,\ x+y \leqslant 1\}$.

Exercice 31 : Déterminer les extremums globaux de $f : \left[0, \frac{\pi}{2}\right]^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \sin(x)\sin(y)\sin(x+y).$$

Exercice 32 : Déterminer les extremums globaux de $f : D \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 2(x-y)^2$$

avec $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leqslant 4\}$.

Exercice 33 : Déterminer les extremums globaux de $f : D \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = y^2 - x^2 y + x^2$$

avec $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid\ x^2 - 1 \leqslant y \leqslant 1 - x^2\}$.

Exercice 34 : Soit $\mathscr{C}$ un cercle de rayon 1. Quel est le périmètre maximal d'un triangle dont les sommets sont sur $\mathscr{C}$?