Mathématiques

PT

Lycée Couffignal

CHAPITRE 8

Fonctions de plusieurs variables

Plan du chapitre

Introduction

La notion de fonctions de plusieurs variables apparait très tôt en physique où l'on étudie souvent des grandeurs dépendant de plusieurs paramètres. Le mathématicien écossais James Gregory en donne une des premières définitions formelles dans ses traités *Vera circuli* et *hyperbolae quadratura* publiés en 1667 : « une fonction est une quantité obtenue à partir d'autres quantités par une succession d'opérations algébriques ou par n'importe quelle opération imaginable ».

La notion de dérivée partielle s'est développée à la fin de XVII^{e} siècle lorsque Newton fonda le calcul différentiel. Durant cette période, les fonctions de plusieurs variables gagnent en importance : de nombreux problèmes issus de la géométrie ou de la mécanique conduisaient naturellement à la résolution d'équations aux dérivées partielles.

Il subsiste néanmoins des faiblesses dans l'utilisation des fonctions de plusieurs variables : elle manque de rigueur, principalement à cause de la mauvaise compréhension de la notion de fonction à cette époque. Il faut attendre la fin du XIXe siècle et le XXe siècle pour voir les techniques se formaliser, notamment celles portant sur les dérivées partielles.

Dans ce chapitre, on commencera par introduire les bases de la topologie afin de généraliser notamment les notions d'intervalle ouvert et de segment. Dans un second temps, nous étendrons la notion de continuité et les outils du calcul différentiel aux fonctions de plusieurs variables. Nous verrons notamment comment résoudre certaines équations aux dérivées partielles et comment déterminer les extremums globaux d'une fonction de deux variables.

Dans tout le chapitre, on fixe deux entiers $n \in \mathbb{N}^*$ et $p \in \mathbb{N}^*$. En pratique, nous aurons $(n, p) \in [\![1,3]\!]^2$.

Partie I Introduction à la topologie sur $\mathbb{R}^p$

I.A - La norme euclidienne sur $\mathbb{R}^p$

Définition (Norme euclidienne) : La norme euclidienne sur l'espace vectoriel $\mathbb{R}^p$ est l'application $\|\cdot\| : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x = (x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{R}^p, \quad \|x\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_p^2}.$$

Remarque 1 : Le norme euclidienne sur $\mathbb{R}$ est la valeur absolue.

Proposition 1 : La norme euclidienne vérifie les propriétés suivantes.

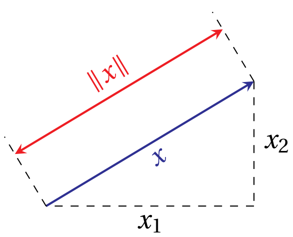
(i) Positivité : pour tout $x \in \mathbb{R}^p$, on a $\|x\| \geqslant 0$,

(ii) Séparation : pour tout $x \in \mathbb{R}^p$, on a $\|x\| = 0$ si et seulement si $x = 0$,

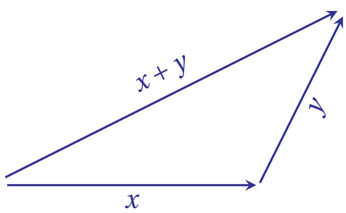
(iii) Homogénéité : pour tout $x \in \mathbb{R}^p$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $\|\lambda \cdot x\| = |\lambda| \cdot \|x\|$,

(iv) Inégalité triangulaire : pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}^p)^2$, on a $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$.

Illustration : On peut représenter la norme euclidienne et l'inégalité triangulaire avec les figures suivantes.



Norme d'un vecteur



Inégalité triangulaire

I.B - Rudiments de topologie sur $\mathbb{R}^p$

Définition (Boule ouverte / fermée) : Soient $a \in \mathbb{R}^p$ et $r > 0$.

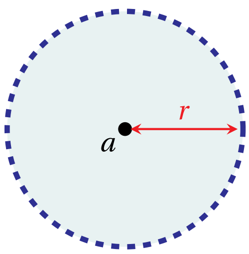
(i) La boule ouverte de centre a et de rayon r est $B(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^p \mid \|x-a\| < r\}$.

(ii) La boule fermée de centre a et de rayon r est $B_f(a,r) = \{x \in \mathbb{R}^p \mid \|x-a\| \leqslant r\}$.

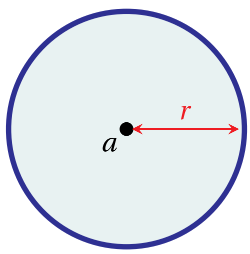
Exemples 1 :

a) Dans $\mathbb{R}$, on a $B(a,r) =]a-r, a+r[$ et $B_f(a,r) = [a-r, a+r]$.

b) Dans $\mathbb{R}^2$, les boules sont des disques représentés ci-dessous.



Boule ouverte de centre a et de rayon r



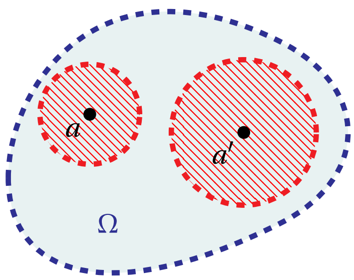
Boule fermée de centre a et de rayon r

Définition (Partie ouverte / fermée) : Soit Ω une partie de $\mathbb{R}^p$.

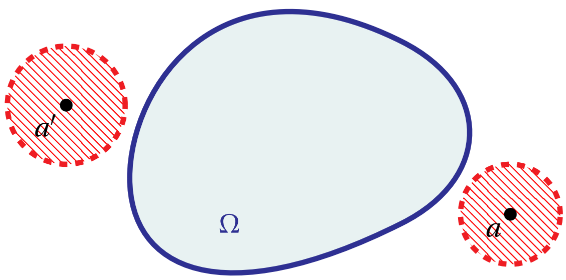
(i) On dit que Ω est une partie ouverte si pour tout $a \in \Omega$, il existe un réel $r > 0$ tel que $B(a,r) \subset \Omega$.

(ii) On dit que Ω est une partie fermée si son complémentaire est ouvert.

Illustration : On peut représenter les notions de parties ouvertes et fermées dans $\mathbb{R}^2$ avec les figures suivantes.



Une partie ouverte



Une partie fermée

Remarques 2 :

a) Intuitivement, une partie de $\mathbb{R}^p$ est ouverte si elle ne contient aucune partie de son bord.

b) Intuitivement, une partie de $\mathbb{R}^p$ est fermée si elle contient tout son bord.

Exemples 2 :

a) L'intervalle $]a,b[$ est un ouvert de $\mathbb{R}$ et l'intervalle $[a,b]$ est un fermé de $\mathbb{R}$.

b) Si $a \in \mathbb{R}^p$ et $r > 0$, alors la boule ouverte $B(a,r)$ est un ouvert de $\mathbb{R}^p$.

c) Si $a \in \mathbb{R}^p$ et $r > 0$, alors la boule fermée $B_f(a,r)$ est un fermé de $\mathbb{R}^p$.

d) L'ensemble $]0,1[\times]0,1[$ est un ouvert de $\mathbb{R}^2$ et l'ensemble $[0,1]\times[0,1]$ est un fermé de $\mathbb{R}^2$.

ATTENTION : Un ensemble n'est pas nécessairement ouvert ou fermé. Par exemple la partie $[0,1[$ de $\mathbb{R}$ n'est pas ouverte et n'est pas fermée.

Définition (Partie bornée) : On dit qu'une partie Ω de $\mathbb{R}^p$ est bornée si elle est contenue dans une boule.

Exemples 3 :

a) L'ensemble $[0,1]^2$ est une partie bornée de $\mathbb{R}^2$.

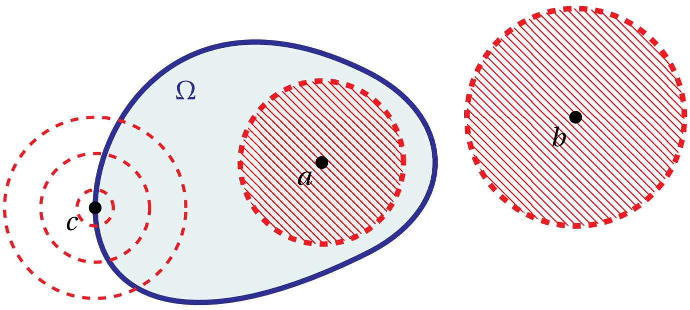
b) L'ensemble $[0,1]\times\mathbb{R}$ n'est pas une partie bornée de $\mathbb{R}^2$.

Définition (Point intérieur / extérieur) : Soient $a\in\mathbb{R}^p$ et Ω une partie de $\mathbb{R}^p$.

(i) On dit que le point a est intérieur à Ω s'il existe $r>0$ tel que $B(a,r)\subset\Omega$.

(ii) On dit que le point a est extérieur à Ω s'il existe $r>0$ tel que $B(a,r)\cap\Omega=\varnothing$.

Illustration : Sur le schéma ci-dessous le points a est intérieur à Ω, le point b est extérieur à Ω et le point c n'est ni un point intérieur ni un point extérieur à Ω.



Remarques 3 :

a) Intuitivement, l'intérieur d'une partie Ω de $\mathbb{R}^p$ est Ω privé de son bord.

b) Intuitivement, l'extérieur d'une partie Ω est l'ensemble des points qui ne sont ni dans Ω ni dans son bord.

c) L'ensemble des points intérieurs d'une partie de $\mathbb{R}^p$ est une partie ouverte de $\mathbb{R}^p$.

Exemples 4 :

a) L'ensemble des points intérieurs de $[a,b]$, $[a,b[$, $]a,b]$ ou $]a,b[$ est $]a,b[$.

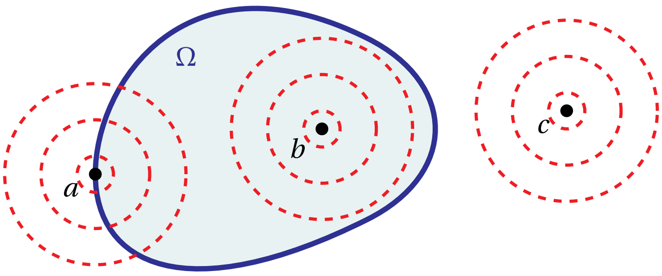
b) L'ensemble des points intérieurs de $B(a,r)$ ou $B_f(a,r)$ est $B(a,r)$.

c) L'ensemble des points intérieurs de $[0,1]\times[0,1]$ est $]0,1[\times]0,1[$.

d) L'ensemble des points extérieurs de $[a,b]$, $[a,b[$, $]a,b]$ ou $]a,b[$ est $]-\infty,a[\cup]b,+\infty[$.

Définition (Point adhérent) : Un point $a\in\mathbb{R}^p$ est adhérent à une partie Ω de l'espace vectoriel $\mathbb{R}^p$ si pour tout réel $r>0$, on a $B(a,r)\cap\Omega\neq\varnothing$.

Illustration : Sur le schéma ci-dessous les points a et b sont adhérents à Ω, mais pas le point c.



Remarque 4 : Intuitivement, l'adhérence d'une partie Ω de $\mathbb{R}^p$ est la réunion entre Ω et son bord.

Exemples 5 :

a) L'ensemble des points adhérents de $[a,b]$, $[a,b[$, $]a,b]$ ou $]a,b[$ est $[a,b]$.

b) L'ensemble des points adhérents de $B(a,r)$ ou $B_f(a,r)$ est $B_f(a,r)$.

c) L'ensemble des points adhérents de $[0,1[\times]0,1]$ est $[0,1]\times[0,1]$.

Définition (Frontière) : La frontière d'une partie Ω de $\mathbb{R}^p$, notée $\partial\Omega$, est l'ensemble des points adhérents à Ω qui ne sont pas intérieur à Ω.

Remarque 5 : La frontière correspond bien à l'intuition que l'on s'en fait sur des exemples simples.

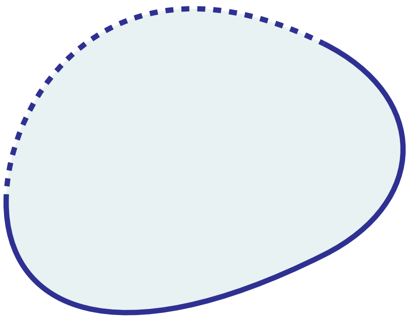
Exemples 6 :

a) La frontière de $[a,b]$, $[a,b[$, $]a,b]$ ou $]a,b[$ est $\{a,b\}$.

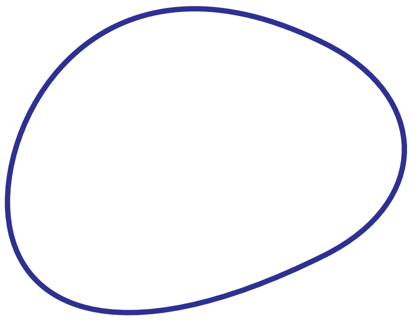
b) La frontière de $B(a,r)$ ou $B_f(a,r)$ est la sphère $S(a,r)=\{x\in\mathbb{R}^p \mid \|a-x\|=r\}$.

c) La frontière de $[0,1[\times]0,1]$ est le carré dont les sommets sont les points $(0,0)$, $(1,0)$, $(0,1)$ et $(1,1)$.

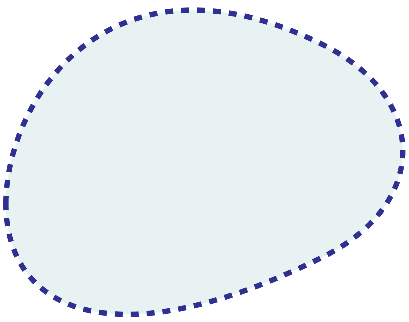
Bilan : On peut résumer les différentes notions définies précédemment avec les figures ci-dessous.



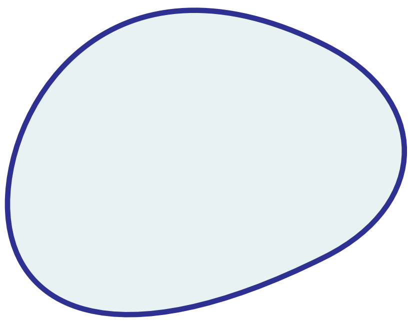
Une partie Ω



La frontière de Ω



L'intérieur de Ω



L'adhérence de Ω

Partie II Fonctions de p variables à valeurs dans $\mathbb{R}$

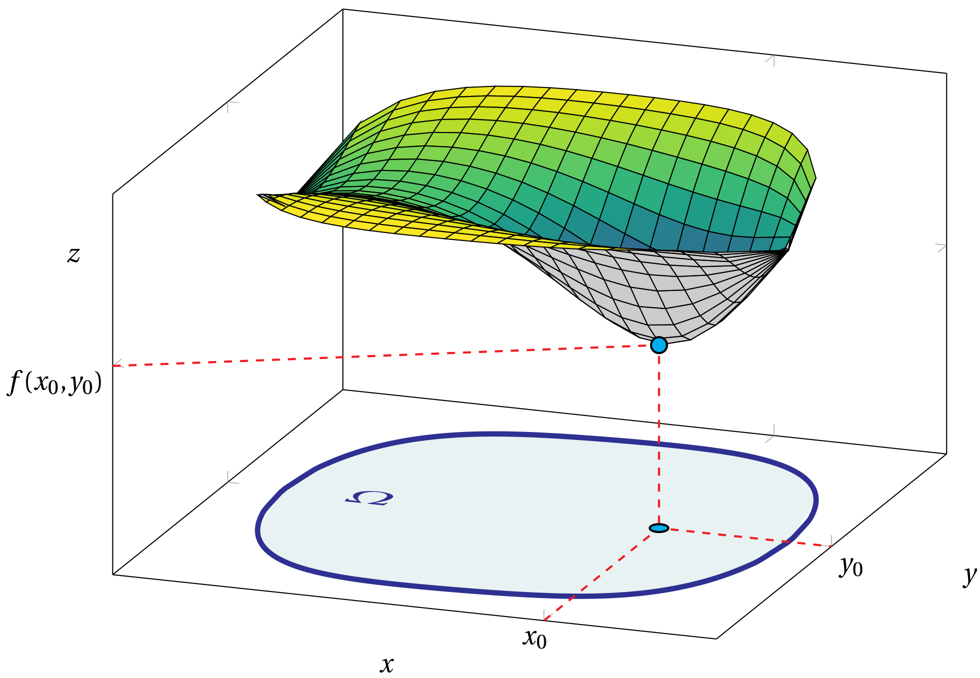
II.A - Représentation graphique d'une fonction de deux variables

Rappelons que si $h : I \to \mathbb{R}$ est une fonction où I est un intervalle non vide de $\mathbb{R}$, alors on peut lui associer sa courbe représentative $\mathscr{C}_h$. De même, on peut représenter une fonction de deux variables par une surface.

Définition (Surface représentative) : Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une application où Ω est une partie non vide de $\mathbb{R}^2$. On appelle surface représentative de l'application f l'ensemble

$$\mathscr{S}_f = \left\{(x, y, f(x, y)) \in \mathbb{R}^3 \mid (x, y) \in \Omega\right\}.$$

Illustration : On peut tracer la surface représentative d'une fonction de deux variables.



II.B - Limite et continuité

Définition (Limite en un point) : Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur une partie Ω de $\mathbb{R}^p$.
On dit que f a pour limite le nombre $\ell \in \mathbb{R}$ en un point $a \in \mathbb{R}^p$ adhérent à Ω si

$$\forall \varepsilon > 0, \quad \exists \eta > 0, \quad \forall x \in \Omega, \quad \|x - a\| < \eta \;\Rightarrow\; |f(x) - \ell| < \varepsilon.$$

Dans ce cas, on note $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$.

Remarque 6 : Dans le cas où $p = 1$, on retrouve la définition de la limite pour une fonction $f : I \to \mathbb{R}$ où I est un intervalle de $\mathbb{R}$.

Définition (Continuité) : Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur une partie Ω de $\mathbb{R}^p$.

(i) On dit que f est continue en un point $a \in \Omega$ si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = f(a)$.

(ii) On dit que f est continue sur Ω si elle est continue en tout point de Ω.

Exemple 7 : Pour tout $i \in [\![1, p]\!]$, la fonctions $f_i : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ définie par $f_i : (x_1, \dots, x_p) \mapsto x_i$ est continue sur $\mathbb{R}^p$.

Proposition 2 : Soient $f : \Omega \to \mathbb{R}$ et $g : \Omega \to \mathbb{R}$ deux fonctions continues définies sur une partie Ω de $\mathbb{R}^p$.

(i) Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, les fonction $f + \lambda g$ et fg sont continues sur Ω.

(ii) Si la fonction g ne s'annule pas sur Ω, alors la fonction $\frac{f}{g}$ est continue sur Ω.

(iii) La composée de deux fonctions continues est une fonction continue.

Exemples 8 :

a) Les fonctions polynomiales $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ sont continues sur $\mathbb{R}^p$. Par exemple, la fonction $(x, y) \mapsto 3x^3y + x^2y^3$ est continue sur $\mathbb{R}^2$.

b) Les fonctions rationnelles sont continues sur leur ensemble de définition. Par exemple, la fonction définie par $(x, y) \mapsto \left(x^2 + y^2\right)^{-1}$ est continue sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$.

ATTENTION : Une fonction $f : \Omega \to \mathbb{R}$ continue par rapport à chacune de ses variables n'est pas nécessairement continue. Par exemple, si on considère la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x, y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0), \end{cases}$$

alors $x \mapsto f(x, y_0)$ est continue sur $\mathbb{R}$ pour tout $y_0 \in \mathbb{R}$ et $y \mapsto f(x_0, y)$ est continue sur $\mathbb{R}$ pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$. Cependant, la fonction f n'est pas continue en $(0, 0)$ car la fonction vectorielle $t \mapsto (t, t)$ est continue, mais on a

$$\forall t \in \mathbb{R}^*, \quad f(t, t) = \frac{t^2}{2t^2} = \frac{1}{2} \xrightarrow[t \to 0]{} \frac{1}{2} \neq 0 = f(0, 0).$$

Proposition 3 : Soit $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ une fonction continue.

(i) L'ensemble $f^{-1}(]0, +\infty[) = \{x \in \mathbb{R}^p \mid f(x) > 0\}$ est une partie ouverte de $\mathbb{R}^p$.

(ii) L'ensemble $f^{-1}([0, +\infty[) = \{x \in \mathbb{R}^p \mid f(x) \geqslant 0\}$ est une partie fermée de $\mathbb{R}^p$.

(iii) L'ensemble $f^{-1}(\{0\}) = \{x \in \mathbb{R}^p \mid f(x) = 0\}$ est une partie fermée de $\mathbb{R}^p$.

Remarque 7 : On peut généraliser la proposition précédente .

(i) Si I est un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, alors $f^{-1}(I) = \{x \in \mathbb{R}^p \mid f(x) \in I\}$ est une partie ouverte de $\mathbb{R}^p$.

(ii) Si I est un intervalle fermé de $\mathbb{R}$, alors $f^{-1}(I) = \{x \in \mathbb{R}^p \mid f(x) \in I\}$ est une partie fermée de $\mathbb{R}^p$.

Exemples 9 :

a) L'ensemble $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y < x^2\right\}$ est une partie ouverte de $\mathbb{R}^2$.

b) L'ensemble $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sin(y) \leqslant \cos(x)\right\}$ est une partie fermée de $\mathbb{R}^2$.

c) L'ensemble $\left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y^2x^3 = \exp(x)\right\}$ est une partie fermée de $\mathbb{R}^2$.

Théorème des bornes atteintes : Si $f : \Omega \to \mathbb{R}$ est une fonction continue définie sur une partie fermée et bornée Ω de $\mathbb{R}^p$, alors la fonction f est bornée sur Ω et elle atteint ses bornes.

DÉMONSTRATION ADMISE

II.C - Dérivées partielles d'ordre 1

Dans cette partie, on note $\mathscr{B} = (e_1, \dots, e_p)$ la base canonique de $\mathbb{R}^p$.

Définition (Dérivées partielles d'ordre 1) : Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur une partie Ω de $\mathbb{R}^p$.
On appelle dérivée partielle d'ordre 1 de la fonction f en un point intérieur $a \in \Omega$ par rapport à la i-ème variable où $i \in [\![1, p]\!]$, sous réserve d'existence, le nombre

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \partial_i f(a) = \lim_{\substack{t \to 0 \\ t \neq 0}} \frac{f(a + te_i) - f(a)}{t}.$$

Remarques 8 :

a) Dans le cas où $p = 2$, les dérivées partielles d'ordre 1 sont notées $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ et $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.
Par définition, pour tout point $a = (x_0, y_0) \in U$, on a sous réserve d'existence des limites que

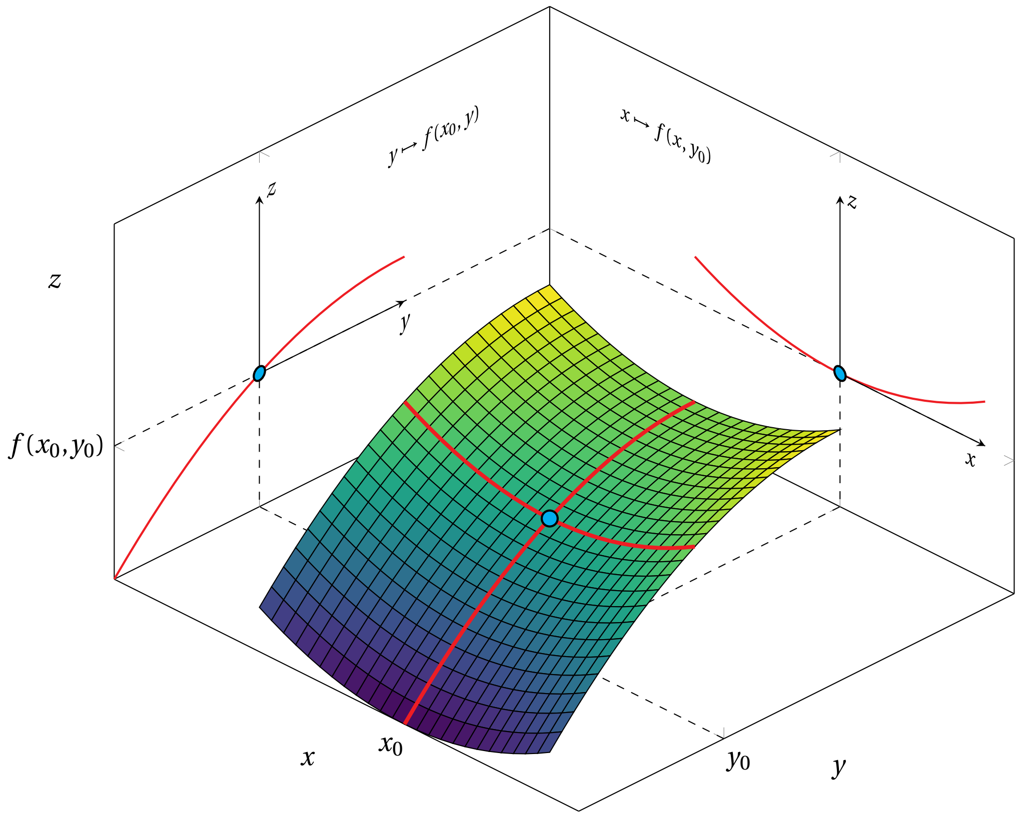
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{\substack{t \to 0 \\ t \neq 0}} \frac{f(x_0 + t, y_0) - f(x_0, y_0)}{t} \quad \text{et} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = \lim_{\substack{t \to 0 \\ t \neq 0}} \frac{f(x_0, y_0 + t) - f(x_0, y_0)}{t}.$$

b) La dérivée partielle d'ordre 1 de f au point a par rapport à la i-ème variable est par définition la dérivée en 0 de la fonction d'une variable

$$t \longmapsto f(a + te_i) = f(a_1, \dots, a_{i-1}, a_i + t, a_{i+1}, \dots, a_n).$$

En conséquence, pour justifier l'existence et calculer les dérivées partielles d'une fonction de plusieurs variables, on peut utiliser les règles usuelles pour une fonction d'une variable.

Illustration : On considère la surface représentative d'une fonction $f : U \to \mathbb{R}$ admettant des dérivées partielles en un point $(x_0, y_0) \in U \subset \mathbb{R}^2$. Les dérivées partielles de la fonction f au point (x_0, y_0) sont les dérivées des fonctions réelles d'une variable $x \mapsto f(x, y_0)$ en x_0 et $y \mapsto f(x_0, y)$ en y_0 tracées ci-dessous.



Exemple 10 : On définit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ par $f : (x, y) \mapsto 3x^2y + 2x + \sin(y)$. Pour tout $y \in \mathbb{R}$, la fonction $x \mapsto f(x, y)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc la dérivée partielle de f par rapport à la première variable existe et on a

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) = 6xy + 2.$$

De même, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la fonction $y \mapsto f(x, y)$ est dérivable sur $\mathbb{R}$, donc la dérivée partielle de f par rapport à la seconde variable existe et on a

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = 3x^2 + \cos(y).$$

Définition (Fonction de classe $\mathscr{C}^1$) : Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^p$.
On dit que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U si ses dérivées partielles d'ordre 1 existent en tout point de U et si elles sont continues sur U.

Proposition 4 : Soient $f : U \to \mathbb{R}$ et $g : U \to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ définies sur un ouvert U de $\mathbb{R}^p$.

(i) Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, les fonction $f + \lambda g$ et fg sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur U.

(ii) Si la fonction g ne s'annule pas sur U, alors la fonction $\dfrac{f}{g}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U.

(iii) La composée de deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$.

DÉMONSTRATION ADMISE

Exemples 11 :

a) Les fonctions polynomiales $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^p$.

b) Les fonctions rationnelles sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur leur ensemble de définition.

Définition (Gradient) : Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^p$.
Le gradient de f en un point $a \in U$ est le vecteur

$$\nabla f(a) = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(a), \dots, \frac{\partial f}{\partial x_p}(a)\right) \in \mathbb{R}^p.$$

Exemple 12 : L'application $f : (x, y) \mapsto xy$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur $\mathbb{R}^2$ et on a $\nabla f(x, y) = (y, x)$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Formule de Taylor-Young à l'ordre 1 : Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^p$.
Pour tout point $a \in U$ et tout $v = (v_1, \dots, v_p) \in \mathbb{R}^p$, on a

$$f(a + v) \underset{v \to 0_{\mathbb{R}^p}}{=} f(a) + \left(\sum_{i=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\, v_i\right) + o\big(\|v\|\big).$$

DÉMONSTRATION ADMISE

Remarque 9 : En reprenant les notations du théorème précédent, l'application linéaire $\mathrm{d}_a f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall v \in \mathbb{R}^p, \quad \mathrm{d}_a f(v) = \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a)\, v_i = \langle \nabla f(a) \mid v \rangle$$

s'appelle la différentielle de f au point a (hors programme en mathématiques). En physique, on utilise la notation

$$\mathrm{d}f = \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_i} \mathrm{d}x_i.$$

II.D - Dérivées partielles et composées

Définition (Dérivée selon un vecteur) : Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur une partie Ω de $\mathbb{R}^p$.
On appelle dérivée de f en un point intérieur $a \in \Omega$ selon le vecteur $v \in \mathbb{R}^p$, sous réserve d'existence, le nombre

$$D_v f(a) = \lim_{\substack{t \to 0 \\ t \neq 0}} \frac{f(a+tv) - f(a)}{t}.$$

Remarques 10 :

a) La dérivée de la fonction f au point a selon un vecteur $v \in \mathbb{R}^p$ est par définition la dérivée en 0 de la fonction d'une variable $t \mapsto f(a+tv)$.

b) La i-ème dérivée partielle de la fonction f est par définition la dérivée de f selon le i-ème vecteur de la base canonique de $\mathbb{R}^p$.

Proposition 5 : Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^p$.
La fonction f admet une dérivée selon tout vecteur $v \in \mathbb{R}^p$ et on a l'égalité

$$\forall v \in \mathbb{R}^p, \quad D_v f(a) = \langle \nabla f(a) \mid v \rangle.$$

Théorème 1 (Règle de la chaîne) : Soit $\gamma = (x_1, \ldots, x_p) : I \to \mathbb{R}^p$ une fonction vectorielle de classe $\mathscr{C}^1$ sur un intervalle I de $\mathbb{R}$. Si $f : U \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^p$ et si f est composable avec γ, alors la fonction

$$F = (f \circ \gamma) : I \to \mathbb{R}, \quad F : t \mapsto (f \circ \gamma)(t) = f(x_1(t), \ldots, x_p(t))$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ sur I et pour tout $t \in I$, on a

$$F'(t) = \langle \nabla f(a) \mid \gamma'(t) \rangle = \sum_{i=1}^{p} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1(t), \ldots, x_p(t)) \cdot x_i'(t).$$

Remarques 11 :

a) Par abus de notation, on écrit parfois cette relation sous la forme réduite

$$\frac{\partial F}{\partial t} = \frac{\partial f}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t} + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_p} \cdot \frac{\partial x_p}{\partial t}.$$

b) La formule précédente peut aussi s'interpréter comme la dérivée de la fonction f le long de la courbe paramétrée par γ.

Exemple 13 : Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$. En appliquant le théorème précédent, on obtient que l'application $F : t \mapsto f\left(t^2, t^3\right)$ est de classe $\mathscr{C}^1$ et que

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad F'(t) = 2t \frac{\partial f}{\partial x}\left(t^2, t^3\right) + 3t^2 \frac{\partial f}{\partial y}\left(t^2, t^3\right).$$

Théorème 2 : Soient $x : O \to \mathbb{R}$ et $y : O \to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert O de $\mathbb{R}^2$.
Si $f : U \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathscr{C}^1$ sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ et si f est composable avec $(x, y) : O \to \mathbb{R}^2$, alors la fonction

$$F : O \to \mathbb{R}, \quad F : (u, v) \mapsto f(x(u, v), y(u, v))$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ sur O et pour tout $(u, v) \in O$, on a

$$\frac{\partial F}{\partial u}(u, v) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(u, v), y(u, v)) \cdot \frac{\partial x}{\partial u}(u, v) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(u, v), y(u, v)) \cdot \frac{\partial y}{\partial u}(u, v),$$
$$\frac{\partial F}{\partial v}(u, v) = \frac{\partial f}{\partial x}(x(u, v), y(u, v)) \cdot \frac{\partial x}{\partial v}(u, v) + \frac{\partial f}{\partial y}(x(u, v), y(u, v)) \cdot \frac{\partial y}{\partial v}(u, v).$$

Remarque 12 : Par abus de notation, on écrit parfois ces relations sous la forme réduite

$$\frac{\partial F}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial u}, \qquad \frac{\partial F}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{\partial x}{\partial v} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{\partial y}{\partial v}.$$

Exemple 14 (Transformation linéaire) : Si on écrit $x = au + bv$ et $y = cu + dv$ avec un quadruplet $(a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$, alors on a les dérivées partielles

$$\frac{\partial x}{\partial u} = a, \quad \frac{\partial y}{\partial u} = c, \quad \frac{\partial x}{\partial v} = b, \quad \frac{\partial y}{\partial v} = d.$$

Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$, alors la fonction $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2, \quad F(u, v) = f(au + bv, cu + dv)$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ et on a

$$\frac{\partial F}{\partial u}(u, v) = a\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + c\frac{\partial f}{\partial y}(x, y), \qquad \frac{\partial F}{\partial v}(u, v) = b\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + d\frac{\partial f}{\partial y}(x, y).$$

Exemple 15 (Coordonnées polaires) : Si on écrit $x = r\cos(\theta)$ et $y = r\sin(\theta)$, alors on a les dérivées partielles

$$\frac{\partial x}{\partial r} = \cos(\theta), \quad \frac{\partial y}{\partial r} = \sin(\theta), \quad \frac{\partial x}{\partial \theta} = -r\sin(\theta), \quad \frac{\partial y}{\partial \theta} = r\cos(\theta).$$

Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ est de classe $\mathscr{C}^1$, alors la fonction $F : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall (r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}, \quad F(r, \theta) = f(r\cos(\theta), r\sin(\theta))$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ et on a

$$\frac{\partial F}{\partial r}(r, \theta) = \cos(\theta)\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \sin(\theta)\frac{\partial f}{\partial y}(x, y), \qquad \frac{\partial F}{\partial \theta}(r, \theta) = -r\sin(\theta)\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + r\cos(\theta)\frac{\partial f}{\partial y}(x, y).$$

II.E - Dérivées partielles d'ordre 2

Définition (Dérivées partielles 2) : Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^p$.
Les dérivées partielles d'ordre 2 de la fonction f sont, sous réserve d'existence, les dérivées partielles d'ordre 1 des applications $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \dfrac{\partial f}{\partial x_p}$.

Notation : La fonction $\dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_j}\right) = \partial_i(\partial_j f)$ est la i-ème dérivée partielle de la j-ème dérivée partielle de f. On la note plus simplement $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}$ ou $\partial_{i,j} f$.

Remarque 13 : Dans le cas où $p = 2$, les dérivées partielles d'ordre 2 sont notées $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ et $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}$.

Définition (Fonction de classe $\mathscr{C}^2$) : Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^p$.
On dit que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur U si ses dérivées partielles d'ordre 2 existent en tout point de U et si elles sont continues sur U.

Proposition 6 : Soient $f : U \to \mathbb{R}$ et $g : U \to \mathbb{R}$ deux fonctions de classe $\mathscr{C}^2$ définies sur un ouvert U de $\mathbb{R}^p$.

(i) Pour tout $\lambda \in \mathbb{R}$, les fonction $f + \lambda g$ et fg sont de classe $\mathscr{C}^2$ sur U.

(ii) Si la fonction g ne s'annule pas sur Ω, alors la fonction $\dfrac{f}{g}$ est de classe $\mathscr{C}^2$ sur U.

(iii) La composée de deux fonctions de classe $\mathscr{C}^2$ est une fonction de classe $\mathscr{C}^2$.

DÉMONSTRATION ADMISE

Exemples 16 :

a) Les fonctions polynomiales $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$ sont de classe $\mathscr{C}^2$ sur $\mathbb{R}^p$.

b) Les fonctions rationnelles sont de classe $\mathscr{C}^2$ sur leur ensemble de définition.

Théorème de Schwarz : Si $f : U \to \mathbb{R}$ est une application de classe $\mathscr{C}^2$ définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^p$, alors

$$\forall (i,j) \in [\![1,p]\!]^2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}.$$

DÉMONSTRATION ADMISE

II.F - Extremums d'une fonction de deux variables

Définition (Extremum global) : Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur une partie Ω de $\mathbb{R}^2$.

(i) On dit que la fonction f admet un maximum global en un point $(x_0, y_0) \in \Omega$ et que $f(x_0, y_0)$ est le maximum global de la fonction f si $f(x, y) \leqslant f(x_0, y_0)$ pour tout $(x, y) \in \Omega$.

(ii) On dit que la fonction f admet un minimum global en un point $(x_0, y_0) \in \Omega$ et que $f(x_0, y_0)$ est le minimum global de la fonction f si $f(x, y) \geqslant f(x_0, y_0)$ pour tout $(x, y) \in \Omega$.

(iii) On dit que la fonction f admet un extremum global en un point $(x_0, y_0) \in \Omega$ et que $f(x_0, y_0)$ est un extremum global de la fonction f si elle admet un maximum global ou un minimum global en (x_0, y_0).

Définition (Extremum local) : Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}$ une fonction définie sur une partie Ω de $\mathbb{R}^2$.

(i) On dit que la fonction f admet un maximum local en un point $(x_0, y_0) \in \Omega$ et que $f(x_0, y_0)$ est un maximum local de la fonction f s'il existe un réel $r > 0$ tel que

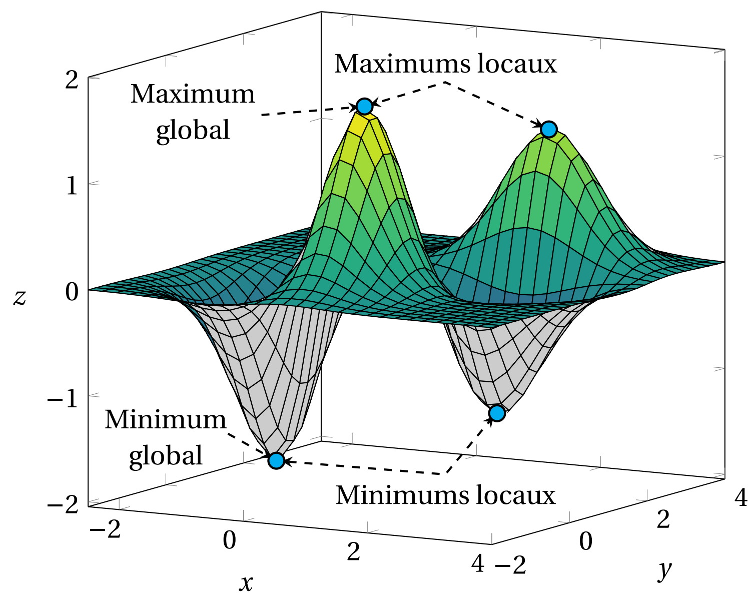
$$\forall (x, y) \in B\big((x_0, y_0), r\big) \cap \Omega, \quad f(x, y) \leqslant f(x_0, y_0).$$

(ii) On dit que la fonction f admet un minimum local en un point $(x_0, y_0) \in \Omega$ et que $f(x_0, y_0)$ est un minimum local de la fonction f s'il existe un réel $r > 0$ tel que

$$\forall (x, y) \in B\big((x_0, y_0), r\big) \cap \Omega, \quad f(x, y) \geqslant f(x_0, y_0).$$

(iii) On dit que f admet un extremum local en un point $(x_0, y_0) \in \Omega$ et que $f(x_0, y_0)$ est un extremum local de la fonction f si elle admet un maximum local ou un minimum local en (x_0, y_0).

Illustration : On peut repérer les extremums d'une fonction sur sa surface représentative comme ci-dessous.



Remarques 14 :

a) Un extremum global est aussi un extremum local.

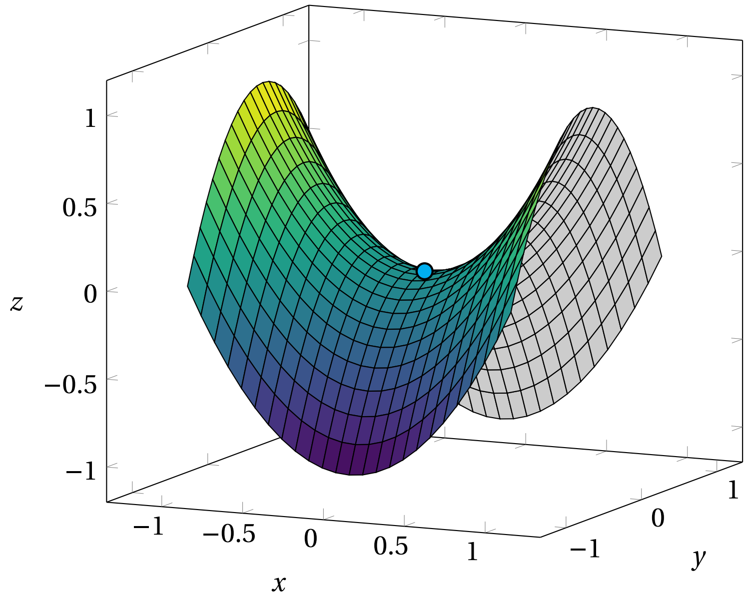
b) La réciproque de cette propriété est fausse comme on peut l'observer sur la surface précédente.

Définition (Point critique) : Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$.
On dit que $a \in U$ est un point critique de f si le gradient $\nabla f(a)$ est nul.

Exemple 17 : La fonction $f : (x, y) \mapsto xy$ admet $(0,0)$ pour unique point critique.

Proposition 7 : Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une application de classe $\mathscr{C}^1$ définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$. Si f admet un extremum local en un point $(x_0, y_0) \in U$, alors (x_0, y_0) est un point critique de f.

ATTENTION : La réciproque de la proposition précédente est fausse. Par exemple, si on considère $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par $f(x, y) = x^2 - y^2$, alors $(0,0)$ est un point critique de f, mais f n'admet pas d'extremum local en $(0,0)$. On peut tracer la surface représentative de f.



Définition (Point col) : Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^1$ définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$.
On dit que $(x_0, y_0) \in U$ est un point col de f si c'est un point critique de f et que f n'admet pas d'extremum local en ce point.

Remarque 15 : On dit aussi que (x_0, y_0) est un point selle de f.

Exemple 18 : L'application $(x, y) \mapsto x^2 - y^2$ admet un point col en $(0,0)$.

Formule de Taylor-Young à l'ordre 2 : Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$.
Pour tout point $(x_0, y_0) \in U$ et tout $(h, k) \in \mathbb{R}^2$, on a

$$
\begin{aligned}
f(x_0 + h, y_0 + k) \underset{(h,k)\to(0,0)}{=} f(x_0, y_0) &+ \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)h + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)k\right) \\
&+ \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0)h^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0, y_0)hk + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0, y_0)k^2\right) + o\big(\|(h,k)\|^2\big).
\end{aligned}
$$

DÉMONSTRATION ADMISE

Définition (Matrice hessienne) : Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^p$.
La matrice hessienne de f au point $a \in U$ est la matrice $H_f(a) = \left(\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(a)\right)_{(i,j)\in[\![1,p]\!]^2}$.

Remarque 16 : En particulier, pour $p = 2$ et $a = (x_0, y_0) \in U$, on a

$$H_f(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0,y_0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x_0,y_0) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0,y_0) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x_0,y_0) \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}).$$

On déduit du théorème de Schwarz que la matrice hessienne $H_f(x_0, y_0)$ est symétrique réelle, donc elle est diagonalisable dans $\mathscr{M}_2(\mathbb{R})$ par le théorème spectral.

Théorème 3 : Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$. On suppose que f admet un point critique $(x_0, y_0) \in U$. On note $\lambda \in \mathbb{R}$ et $\mu \in \mathbb{R}$ les valeurs propres de la matrice $H_f(x_0, y_0)$.
- (i) Si $\lambda > 0$ et $\mu > 0$, alors f admet un minimum local en (x_0, y_0).
- (ii) Si $\lambda < 0$ et $\mu < 0$, alors f admet un maximum local en (x_0, y_0).
- (iii) Si $\lambda\mu < 0$, alors f admet un point col en (x_0, y_0).

ATTENTION : Si au moins une des valeurs propres de la matrice $H_f(x_0, y_0)$ est nulle, on ne peut pas conclure.

Comme nous savons que $\det\big(H_f(x_0,y_0)\big) = \lambda\mu$ et que $\operatorname{tr}\big(H_f(x_0,y_0)\big) = \lambda + \mu$, nous pouvons reformuler le résultat précédent avec le déterminant et la trace de la matrice hessienne de f au point (x_0, y_0).

Corollaire 1 : Soit $f : U \to \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathscr{C}^2$ définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^2$. On suppose que f admet un point critique $(x_0, y_0) \in U$.
- (i) Si $\det\big(H_f(x_0,y_0)\big) > 0$ et $\operatorname{tr}\big(H_f(x_0,y_0)\big) > 0$, alors f admet un minimum local en (x_0, y_0).
- (ii) Si $\det\big(H_f(x_0,y_0)\big) > 0$ et $\operatorname{tr}\big(H_f(x_0,y_0)\big) < 0$, alors f admet un maximum local en (x_0, y_0).
- (iii) Si $\det\big(H_f(x_0,y_0)\big) < 0$, alors f admet un point col en (x_0, y_0).

Exemple 19 : On souhaite étudier les extremums de l'application $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy.$$

L'application f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur la partie ouverte $\mathbb{R}^2$. D'après la proposition 7, les extremums se trouvent en des points critiques de f. Un point $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ est un point critique de f si et seulement si

$$\nabla f(x,y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) & = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) & = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} 4x^3 - 4y & = 0 \\ 4y^3 - 4x & = 0 \end{cases} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{cases} y & = x^3 \\ x^9 & = x. \end{cases}$$

On en déduit que les points critiques de f sont $(0,0)$, $(1,1)$ et $(-1,-1)$. La matrice hessienne de f en (x_0, y_0) est

$$H_f(x_0,y_0) = \begin{pmatrix} 12x_0^2 & -4 \\ -4 & 12y_0^2 \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_2(\mathbb{R}).$$

- En $(x_0, y_0) = (0,0)$, on a $\det\big(H_f(x_0,y_0)\big) = -16 < 0$, donc f admet un point col en $(0,0)$.
- En $(x_0, y_0) = \pm(1,1)$, on a $\det\big(H_f(x_0,y_0)\big) = 128 > 0$ et $\operatorname{tr}\big(H_f(x_0,y_0)\big) = 24 > 0$, donc f admet un minimum local en $\pm(1,1)$. La valeur de ce minimum local est $f(1,1) = f(-1,-1) = -2$.

Partie III Fonctions de p variables à valeurs dans $\mathbb{R}^n$

Dans cette partie, on étend succinctement quelques unes des notions vues dans la partie précédente au cadre des fonctions à valeurs dans $\mathbb{R}^n$.

Si $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ est une fonction définie sur une partie Ω de $\mathbb{R}^p$, alors elle s'écrit de manière unique sous la forme

$$f = (f_1, \ldots, f_n) \quad \text{avec} \quad f_1, \ldots, f_n : \Omega \to \mathbb{R}.$$

Exemple 20 : La fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par

$$\forall (r, \theta) \in \mathbb{R}^2, \quad f(r, \theta) = \big(r\cos(\theta), r\sin(\theta)\big)$$

s'écrit $f = (f_1, f_2)$ où les fonctions $f_1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $f_2 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sont définies par

$$\forall (r, \theta) \in \mathbb{R}^2, \quad f_1(r, \theta) = r\cos(\theta) \quad \text{et} \quad f_2(r, \theta) = r\sin(\theta).$$

III.A - Limite et continuité

Définition (Limite en un point) : Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ une fonction définie sur une partie Ω de $\mathbb{R}^p$.
On dit que f a pour limite le n-uplet $\ell = (\ell_1, \ldots, \ell_n) \in \mathbb{R}^n$ en un point $a \in \mathbb{R}^p$ adhérent à Ω si

$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad \lim_{x \to a} f_k(x) = \ell_k.$$

Dans ce cas, on note $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \ell$.

Définition (Continuité) : Soit $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ une fonction définie sur une partie Ω de $\mathbb{R}^p$.

(i) On dit que f est continue en un point $a \in \Omega$ si les fonctions $f_1, \ldots, f_n$ sont continues en a.

(ii) On dit que f est continue sur Ω si les fonctions $f_1, \ldots, f_n$ sont continues sur Ω.

III.B - Dérivées partielles

Définition (Dérivées partielles d'ordre 1) : Soit $f : U \to \mathbb{R}^n$ une fonction définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^p$.
On appelle dérivée partielle d'ordre 1 de f au point $a \in U$ par rapport à la i-ème variable où $i \in [\![1, p]\!]$, sous réserve d'existence, le vecteur

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) = \left(\frac{\partial f_1}{\partial x_i}(a), \ldots, \frac{\partial f_n}{\partial x_i}(a)\right).$$

Définition (Fonction de classe $\mathscr{C}^1$) : Soit $f : U \to \mathbb{R}^n$ une fonction définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^p$.
On dit que f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur U si les fonctions $f_1, \ldots, f_n$ sont de classe $\mathscr{C}^1$ sur U.

Définition (Dérivées partielles 2) : Soit $f : U \to \mathbb{R}^n$ une fonction définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^p$.
Les dérivées partielles d'ordre 2 de la fonction f sont, sous réserve d'existence, les dérivées partielles d'ordre 1 des applications $\dfrac{\partial f}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial f}{\partial x_p}$.

Définition (Fonction de classe $\mathscr{C}^2$) : Soit $f : U \to \mathbb{R}^n$ une fonction définie sur un ouvert U de $\mathbb{R}^p$.
On dit que f est de classe $\mathscr{C}^2$ sur U si les fonctions $f_1, \ldots, f_n$ sont de classe $\mathscr{C}^2$ sur U.

Partie IV Méthodes

IV.A - Résoudre une équation aux dérivées partielles

Il n'y a pas de méthode générale de résolution pour les équations aux dérivées partielles. On utilise souvent des changements de variable qui sont donnés dans les énoncés. Nous allons traiter plusieurs exemples.

Exemple 21 (Transformation affine) : On souhaite déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ vérifiant

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = f. \qquad (E)$$

Pour résoudre cette équation aux dérivées partielles, on utilise le changement de variable

$$(u, v) = (x + y, x - y) \quad \Leftrightarrow \quad (x, y) = \left(\frac{u+v}{2}, \frac{u-v}{2}\right).$$

D'après le théorème de dérivation d'une composée, la fonction $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2, \quad F(u, v) = f\Bigg(\underbrace{\frac{u+v}{2}}_{x}, \underbrace{\frac{u-v}{2}}_{y}\Bigg)$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ et on a

$$\frac{\partial F}{\partial u}(u, v) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \cdot \frac{\partial x}{\partial u}(u, v) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \cdot \frac{\partial y}{\partial u}(u, v) = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right).$$

On en déduit que f est solution de (E) si et seulement la fonction F vérifie

$$\frac{\partial F}{\partial u} = \frac{1}{2}F.$$

En remarquant que cette dernière est une équation différentielle d'ordre 1 en la variable u, on en déduit que f est solution de (E) si et seulement si il existe une fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que

$$\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2, \quad F(u, v) = h(v) \exp\left(\frac{u}{2}\right).$$

Finalement, on conclut que les solutions de (E) sont les fonctions de la forme

$$f : (x, y) \longmapsto h(x - y) \exp\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

où $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$.

Exemple 22 (Coordonnées polaires) : On souhaite déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ vérifiant

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 0. \qquad (E)$$

Pour résoudre cette équation aux dérivées partielles, on utilise les coordonnées polaires $(x, y) = (r\cos(\theta), r\sin(\theta))$. D'après le théorème de dérivation d'une composée, la fonction $F : \mathbb{R}_+^* \times \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall (r, \theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \quad F(r, \theta) = f(\underbrace{r\cos(\theta)}_{x}, \underbrace{r\sin(\theta)}_{y})$$

est de classe $\mathscr{C}^1$ et on a

$$\begin{aligned}\frac{\partial F}{\partial r}(r, \theta) &= \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \cdot \frac{\partial x}{\partial r}(r, \theta) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \cdot \frac{\partial y}{\partial r}(r, \theta) \\ &= \cos(\theta)\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + \sin(\theta)\frac{\partial f}{\partial y}(x, y) = \frac{1}{r}\left(x\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) + y\frac{\partial f}{\partial y}(x, y)\right).\end{aligned}$$

On en déduit que f est solution de (E) si et seulement la fonction F vérifie

$$r\frac{\partial F}{\partial r} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\partial F}{\partial r} = 0.$$

Ainsi, la fonction f est solution de (E) si et seulement si il existe $g : \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[\to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ telle que

$$\forall (r,\theta) \in \mathbb{R}_+^* \times \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[, \quad F(r,\theta) = g(\theta).$$

Comme $\theta = \mathrm{Arctan}(y/x)$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}_+^* \times \mathbb{R}$, on conclut que les solutions de (E) sont les fonctions de la forme

$$f : (x, y) \mapsto g\left(\mathrm{Arctan}\left(\frac{y}{x}\right)\right)$$

où $g :]-\pi/2, \pi/2[\to \mathbb{R}$ est une fonction de classe $\mathscr{C}^1$.

Exemple 23 (Une équation aux dérivées partielles d'ordre 2) : On souhaite déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ vérifiant

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0. \qquad (E)$$

Pour résoudre cette équation aux dérivées partielles, on utilise le changement de variable

$$(u, v) = (x, x + y) \quad \Leftrightarrow \quad (x, y) = (u, v - u).$$

D'après le théorème de dérivation d'une composée, la fonction $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2, \quad F(u, v) = f(\underbrace{u}_{x}, \underbrace{v - u}_{y})$$

est de classe $\mathscr{C}^2$ et on a

$$\frac{\partial F}{\partial u}(u, v) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \cdot \frac{\partial x}{\partial u}(u, v) + \frac{\partial f}{\partial y}(x, y) \cdot \frac{\partial y}{\partial u}(u, v) = \frac{\partial f}{\partial x}(x, y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x, y).$$

En appliquant une seconde fois la formule de dérivation, on obtient que

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2 F}{\partial u^2}(u, v) &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right)(x, y) \cdot \frac{\partial x}{\partial u}(u, v) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y}\right)(x, y) \cdot \frac{\partial y}{\partial u}(u, v) \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y) - 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y).\end{aligned}$$

On en déduit que f est solution de (E) si et seulement la fonction F vérifie

$$\frac{\partial^2 F}{\partial u^2} = 0.$$

Ainsi, la fonction f est solution de (E) si et seulement si il existe deux fonctions $h, k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^2$ telles que

$$\forall (u, v) \in \mathbb{R}^2, \quad F(u, v) = h(v)u + k(v).$$

Finalement, on conclut que les solutions de (E) sont les fonctions de la forme

$$f : (x, y) \mapsto h(x + y)x + k(x + y).$$

où $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ et $k : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sont deux fonctions de classe $\mathscr{C}^2$.

IV.B - Déterminer les extremums globaux d'une fonction de deux variables

On considère une application $f : \Omega \to \mathbb{R}$ de classe $\mathscr{C}^1$ où Ω est une partie non vide de $\mathbb{R}^2$ fermée et bornée. La méthode ci-dessous permet de déterminer les extremums globaux de l'application f sur Ω.

1) On vérifie que Ω est une partie fermée et bornée de $\mathbb{R}^2$ et que f est une application continue, ce qui justifie que f admet un maximum et un minimum sur Ω par le théorème des bornes atteintes.
2) En notant U l'intérieur de Ω, on justifie que l'application f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'ouvert U. On détermine les points critiques de l'application $f : U \to \mathbb{R}$, puis on calcule l'image par f de chacun de ces points.
3) On détermine les extremums de l'application $f : \partial\Omega \to \mathbb{R}$ en se ramenant à l'étude de fonctions à une variable.
4) On conclut en comparant les différentes valeurs de f trouvées.

Exemple 24 : On souhaite déterminer le maximum de la fonction $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall (x,y) \in [0,1]^2, \quad f(x,y) = \frac{x+y}{(1+x^2)(1+y^2)}.$$

1) La fonction f est continue sur $\Omega = [0,1]^2$ qui est fermée et bornée, donc elle admet un maximum sur $[0,1]^2$ par le théorème des bornes atteintes.
2) La fonction f est de classe $\mathscr{C}^1$ sur l'ouvert $U =]0,1[^2$. Les points critiques de f sur U sont les solutions de

$$\nabla f(x,y) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{\partial f}{\partial x}(x,y) & = & 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y) & = & 0 \end{array} \right. \quad \Leftrightarrow \quad \left\{ \begin{array}{rcl} \dfrac{1-2xy-x^2}{(1+x^2)^2(1+y^2)} & = & 0 \\ \dfrac{1-2xy-y^2}{(1+x^2)(1+y^2)^2} & = & 0. \end{array} \right.$$

Ce système admet le couple $(1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$ comme unique solution dans $U =]0,1[^2$, donc c'est le seul point critique de l'application f dans U. La valeur de f en ce point est

$$f\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{8}.$$

3) Les points de $\partial\Omega$ s'écrivent sous la forme $(0,t)$, $(t,0)$, $(1,t)$ ou $(t,1)$ avec $t \in [0,1]$. On en déduit que les valeurs prises par l'application f sur $\partial\Omega$ sont exactement les valeurs prises sur $[0,1]$ par les fonctions

$$h_1 : t \mapsto f(0,t), \quad h_2 : t \mapsto f(t,0), \quad h_3 : t \mapsto f(1,t) \quad \text{et} \quad h_4 : t \mapsto f(t,1).$$

Pour tout $t \in [0,1]$, on a les expressions

$$h_1(t) = h_2(t) = \frac{t}{1+t^2} \quad \text{et} \quad h_3(t) = h_4(t) = \frac{1+t}{2(1+t^2)}.$$

En effectuant des études de fonctions d'une variable, on obtient les tableaux de variations suivants.

t	0		1
h_1	0	↗	$\frac{1}{2}$

t	0		$\sqrt{2}-1$		1
h_3	$\frac{1}{2}$	↗	$\frac{\sqrt{2}+1}{4}$	↘	$\frac{1}{2}$

On en déduit que le maximum de f sur $\partial\Omega$ est

$$\max_{\partial\Omega}(f) = \max\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}+1}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}+1}{4}$$

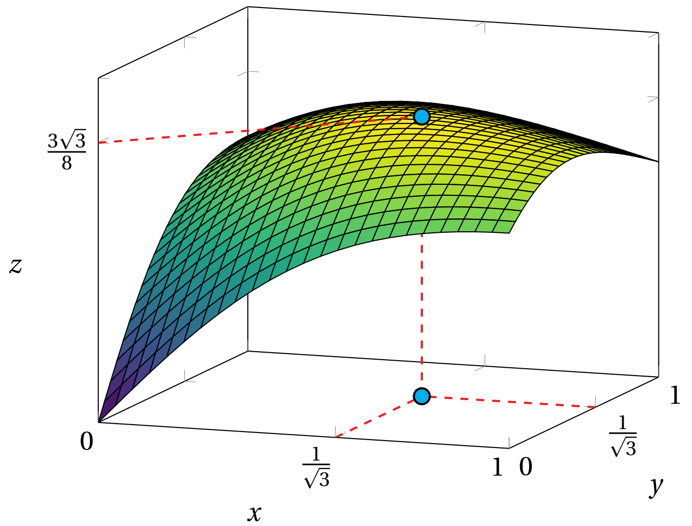
et qu'il est atteint aux points $(\sqrt{2}-1, 1)$ et $(1, \sqrt{2}-1)$.

4) On conclut que le maximum de f sur $\Omega = [0,1]^2$ est

$$\max_{\Omega}(f) = \max\left(\frac{3\sqrt{3}}{8}, \frac{\sqrt{2}+1}{4}\right) = \frac{3\sqrt{3}}{8}$$

et qu'il est atteint au point $\left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$.

On peut tracer la surface représentative de la fonction f.



Il n'est pas évident d'observer sur le graphique ci-dessus que la valeur que nous avons trouvée est bien le maximum de la fonction f. Il est plus facile de le constater en utilisant les deux angles de vue suivants.