CHAPITRE 5

Espaces probabilisés

Jérôme von Buhren
http://vonbuhren.free.fr

Lycée Couffignal - PT*

Les probabilités jouent un rôle important en sciences. En physique, elles apparaissent par exemple dans la description du mouvement d'une particule immergée dans un fluide (mouvement brownien). Plus généralement, elles jouent un rôle central dans la branche de la physique qui étudie et décrit les phénomènes fondamentaux à à l'échelle atomique et subatomique : la mécanique quantique. De plus, elles interviennent dans de nombreuses autres disciplines, notamment en biologie, en théorie des jeux ou en sciences humaines où les outils statistiques sont omniprésents.

Dans ce chapitre, nous commencerons par étudier succinctement la notion d'ensemble dénombrable. Dans un second temps, étendrons la définition d'espace probabilisé vue en première année ainsi que ses propriétés au cadre d'un univers infini.

Rappelons que l'on dit qu'un ensemble Ω est de cardinal fini $n \in \mathbb{N}$ s'il existe application bijective $f : [\![1, n]\!] \to \Omega$. Intuitivement, se donner une telle bijection revient à énumérer les éléments de Ω.

Nous allons à présent nous intéresser au cas des ensembles infinis.

Définition (Ensemble dénombrable)

Un ensemble Ω est dit dénombrable s'il existe une bijection $f : \mathbb{N} \to \Omega$.

Remarques 1

a) Un ensemble dénombrable est nécessairement infini.

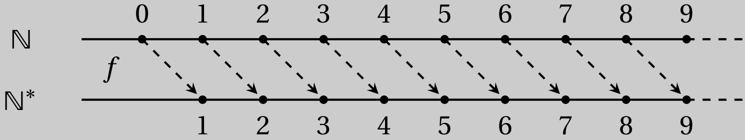
b) Intuitivement, un ensemble infini est dénombrable si on peut décrire un procédé d'énumération de ses éléments.

c) Un ensemble Ω est fini ou dénombrable si et seulement si il existe une suite $(\omega_n)_{n \in \mathbb{N}}$ d'éléments de Ω telle que $\Omega = \{\omega_n \mid n \in \mathbb{N}\}$.

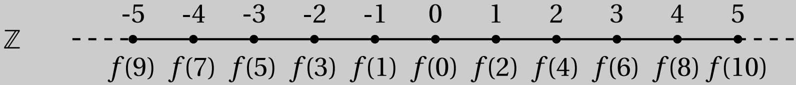
Exemples 1

a) L'ensemble $\mathbb{N}$ est dénombrable : il suffit de considérer $f = \mathrm{Id}_{\mathbb{N}}$.

b) L'ensemble $\mathbb{N}^*$ est dénombrable : il suffit de considérer $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^*$ définie par $f : n \mapsto n+1$.



c) L'ensemble $\mathbb{Z}$ est dénombrable : il suffit de considérer $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ définie par $f : n \mapsto (-1)^n \left\lfloor \dfrac{n+1}{2} \right\rfloor$.

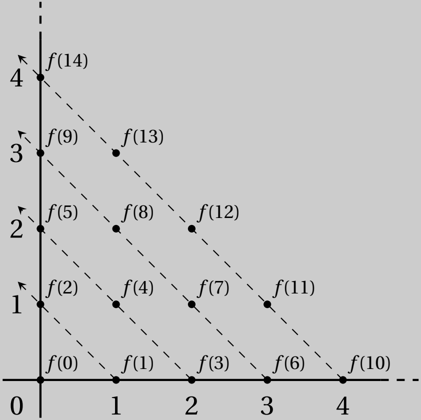


Lemme 1

L'ensemble $\mathbb{N}^2$ est dénombrable.

DÉMONSTRATION (NON EXIGIBLE)

On énumère les éléments de $\mathbb{N}^2$ le long des diagonales (voir la figure ci-contre) : un élément $(i,j) \in \mathbb{N}^2$ est caractérisé par l'indice de sa diagonale et sa position dans la diagonale, c'est-à-dire par le couple $(i+j,j)$.

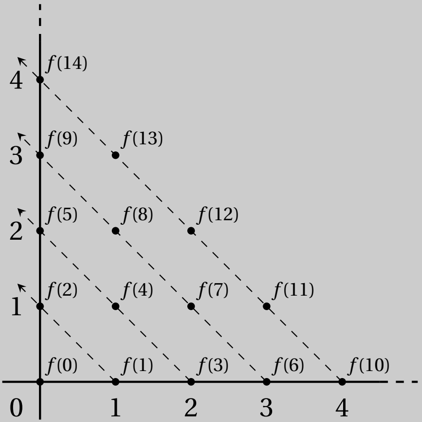


Démonstration (Non exigible)

Plus formellement, on considère $g : \mathbb{N}^2 \to \mathbb{N}$ définie pour tout élément $(i,j) \in \mathbb{N}^2$ par

$$g(i,j) = \left(\sum_{k=0}^{i+j-1} (k+1)\right) + j$$
$$= \frac{(i+j)(i+j+1)}{2} + j.$$

On peut vérifier que g est bijective. L'application de la définition $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}^2$ est l'application réciproque de g.



Proposition 1

Le produit cartésien de deux ensembles dénombrables est un ensemble dénombrable.

Exemples 2

a) L'ensemble $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}^*$ est dénombrable.

b) L'ensemble $\mathbb{Z}^2$ est dénombrable.

Proposition 2 ($\star$)

Les ensembles $\mathbb{R}$ et $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ ne sont pas dénombrables.

Démonstration

Admise

Définition (Expérience aléatoire)

Une expérience aléatoire est une expérience qui ne donne pas nécessairement le même résultat quand on la renouvelle dans des conditions identiques.

Exemples 3

a) Un lancer d'une pièce.
b) Un lancer de trois dés discernables.
c) La durée de vie en année d'un composant électronique.
d) La durée de désintégration d'un isotope radioactif.

Définition (Univers)

L'univers est l'ensemble des issues possibles d'une expérience aléatoire.

Exemples 4

On reprend les expériences aléatoires de l'exemple 3.

a) $\Omega = \{\text{Pile}, \text{Face}\}$ qui est fini.

b) $\Omega = [\![1, 6]\!]^3$ qui est fini.

c) $\Omega = \mathbb{N}$ qui est dénombrable.

d) $\Omega = \mathbb{R}_+$ qui n'est pas dénombrable.

Remarque 2

En pratique, on demande très rarement de décrire l'univers associé à une expérience aléatoire : on admet son existence dans les exercices en général.

Le programme de première année se limitait à l'étude des expériences aléatoires dont l'univers Ω était un ensemble fini. Dans ce cas, un évènement A était simplement une partie de Ω.

Nous allons à présent étudier des expériences aléatoires dont l'univers peut être infini. Dans le cadre d'un univers dénombrable, on pourrait remarquer que la notion d'évènement vu en première année s'adapte directement. Ce n'est pas malheureusement plus le cas dés que Ω est un ensemble infini non dénombrable : on peut démontrer qu'il n'est en général pas possible de considérer toutes les parties de Ω comme des évènements.

Ce constat nous amène à introduire la notion de tribu sur un ensemble Ω.

On rappelle que si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de parties d'un ensemble Ω, la réunion et l'intersection de $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sont respectivement les parties de Ω définies par

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \{\omega \in \Omega \mid \exists n \in \mathbb{N},\ \omega \in A_n\} \quad \text{et} \quad \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n = \{\omega \in \Omega \mid \forall n \in \mathbb{N},\ \omega \in A_n\}.$$

On rappelle également que le complémentaire d'une partie A d'un ensemble Ω est

$$\overline{A} = \Omega \setminus A = \{\omega \in \Omega \mid \omega \notin A\}.$$

Proposition (Loi de De Morgan)

Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de parties d'un ensemble Ω, on a

$$\overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n} \qquad \text{et} \qquad \overline{\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \overline{A_n}.$$

Définition (Tribu)

Une tribu sur un ensemble Ω est une partie $\mathscr{A}$ de $\mathscr{P}(\Omega)$ vérifiant

(i) $\Omega \in \mathscr{A}$,

(ii) Pour tout $A \in \mathscr{A}$, on a $\overline{A} \in \mathscr{A}$,

(iii) Pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'éléments de $\mathscr{A}$, on a $\displaystyle\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathscr{A}$.

Exemple 5

Les ensembles $\mathscr{A} = \{\varnothing, \Omega\}$ et $\mathscr{A} = \mathscr{P}(\Omega)$ sont des tribus sur Ω.

Définition (Espace probabilisable)

Un espace probabilisable est un couple $(\Omega, \mathscr{A})$ où Ω est un ensemble et $\mathscr{A}$ est une tribu sur Ω.

Remarque 3

En pratique, choisir une tribu sur un univers modélisant une expérience aléatoire est difficile.

- Si l'univers est un ensemble fini ou dénombrable, on peut choisir $\mathscr{A} = \mathscr{P}(\Omega)$.
- Dans le cas contraire, l'énoncé admettra l'existence d'un espace probabilisable adapté à l'expérience étudiée.

Proposition 3

Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace probabilisable.

(i) Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathscr{A}$, on a $\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathscr{A}$.

(ii) Pour tout $(A, B) \in \mathscr{A}^2$, on a $B \setminus A \in \mathscr{A}$.

Définition (Évènements)

Les éléments d'une tribu $\mathscr{A}$ sur Ω sont appelés les évènements.

Exemples 6

On reprend les expériences aléatoires de l'exemple 3.

a) On munit Ω de la tribu $\mathscr{P}(\Omega)$. L'évènement « faire pile » est $E = \{\text{Pile}\}$.

b) On munit Ω de la tribu $\mathscr{P}(\Omega)$. L'évènement « la somme des dés est 4 » est $E = \{(2,1,1),(1,2,1),(1,1,2)\}$.

c) On munit Ω de la tribu $\mathscr{P}(\Omega)$. L'évènement « le composant électronique vie au plus 5 ans » est $E = [\![0,5]\!]$.

d) Nous admettons qu'il existe une tribu adéquate pour étudier cette expérience aléatoire. L'évènement « l'isotope ne s'est pas désintégré au bout de 10 ans » est $E =]10,+\infty[$.

Vocabulaires

La théorie moderne des probabilités utilisent le langage des ensembles pour modéliser une expérience aléatoire. Si $(\Omega, \mathscr{A})$ est un espace probabilisable, le tableau ci-dessous établit la correspondance entre le langage ensembliste et le langage probabiliste.

Notation	Vocabulaire ensembliste	Vocabulaire probabiliste
Ω	ensemble plein	évènement certain
$\varnothing$	ensemble vide	évènement impossible
ω	élément de Ω	évènement élémentaire
$A, B \in \mathscr{A}$	éléments de $\mathscr{A}$	évènements
$\overline{A}$	complémentaire de A dans Ω	évènement contraire de A
$A \cup B$	réunion de A et B	évènement A ou B
$A \cap B$	intersection de A et B	évènement A et B
$A \cap B = \varnothing$	A et B sont disjoints	A et B sont incompatibles

Maintenant que nous avons formalisé la notion d'évènement dans le cadre d'un univers infini, nous pouvons étendre la notion de probabilité vue en première année.

Définition (Probabilité)

Soit $(\Omega, \mathscr{A})$ un espace probabilisable. On appelle probabilité sur $(\Omega, \mathscr{A})$ toute application $P : \mathscr{A} \to [0,1]$ vérifiant

(i) $P(\Omega) = 1$,

(ii) Pour toute suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'événements deux à deux incompatibles, on a

$$P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n).$$

Remarques 4

a) La condition (ii) de la définition ci-dessous sous-entend que la série $\sum P(A_n)$ est convergente.

b) Si $A_1, \ldots, A_n$ sont des évènements deux à deux incompatibles, la condition (ii) implique également que

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k).$$

En particulier, la définition ci-dessus est plus générale que celle vue en première année.

Définition (Espace probabilisé)

Un espace probabilisé est un triplet $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ où Ω est un ensemble, $\mathscr{A}$ est une tribu sur Ω et P une probabilité sur $(\Omega, \mathscr{A})$.

Remarque 5

Imaginons que l'on souhaite étudier l'expérience aléatoire consistant à choisir un nombre réel aléatoirement et uniformément dans l'intervalle $[0,1]$. Intuitivement, pour modéliser cette expérience, nous pouvons considérer comme univers $\Omega = [0,1]$ et nous cherchons une tribu $\mathscr{A}$ contenant tous les intervalles $[a,b] \subset [0,1]$ et une probabilité $P : \mathscr{A} \to [0,1]$ telle que

$$\forall [a,b] \subset [0,1], \quad P([a,b]) = b - a.$$

Si on choisit la tribu $\mathscr{A} = \mathscr{P}(\Omega)$, on peut démontrer sous certaines conditions qu'il n'existe pas de probabilité vérifiant la relation ci-dessus. C'est une des raisons qui motive l'introduction de la notion de tribu.

Proposition 4

Soient A et B deux évènements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.

(i) $P(\varnothing) = 0$.

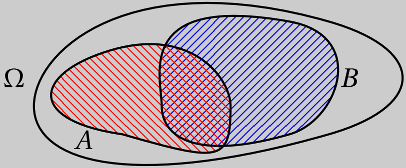
(ii) $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

(iii) Si $A \subset B$, alors $P(A) \leqslant P(B)$ et $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$.

(iv) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

Illustration

La figure ci-dessous permet de comprendre l'origine de la formule (iv) de la proposition.



Proposition (Continuité monotone)

Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'évènements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.

(i) Si la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est croissante (i.e. $A_n \subset A_{n+1}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$), alors on a

$$P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n).$$

(ii) Si la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante (i.e. $A_{n+1} \subset A_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$), alors on a

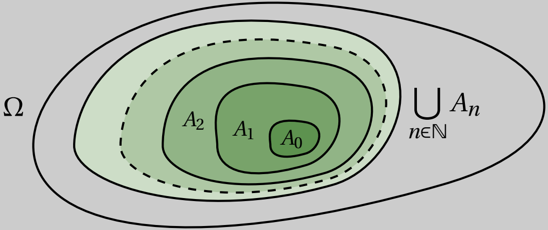
$$P\left(\bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = \lim_{n\to+\infty} P(A_n).$$

(iii) Dans le cas général, on a les égalités

$$P\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k\right) = \lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcup_{k=0}^{n} A_k\right) \quad \text{et} \quad P\left(\bigcap_{k\in\mathbb{N}} A_k\right) = \lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcap_{k=0}^{n} A_k\right).$$

Illustration

La figure ci-dessous représente la situation du (i) de la proposition.



Comme on a les inclusions $A_0 \subset A_1 \subset A_2 \subset \cdots \subset \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$, les évènements de la suite $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ne sont pas deux à deux incompatibles en général, mais on peut écrire

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \underbrace{A_0 \cup \left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A_{n+1} \setminus A_n) \right)}_{\text{réunions d'évènements deux à deux incompatibles}}.$$

Exemple 7

On procède à une succession infinie de lancers d'une pièce équilibrée. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on désigne par A_k l'évènement « ne pas obtenir de pile au k-ième lancers » et par A l'évènement « ne pas obtenir de pile au cours de l'expérience ». D'après la propriété (iii) de la proposition précédente, on a

$$P(A) = P\left(\bigcap_{k\in\mathbb{N}^*} A_k\right) = \lim_{n\to+\infty} P\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) = \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0.$$

Définition (Évènement presque sûr / négligeable)

Soit A un évènement d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$.

(i) L'évènement A est dit presque sûr si $P(A) = 1$.

(ii) L'évènement A est dit négligeable si $P(A) = 0$.

Remarque 6

Un évènement A est négligeable si et seulement si $\overline{A}$ est presque sûr.

Exemple 8

L'évènement A de l'exemple précédent n'est pas impossible et est négligeable.

Proposition (Sous-additivité)

Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite d'évènements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ telle que la série $\sum P(A_n)$ converge, alors on a

$$P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) \leqslant \sum_{n=0}^{+\infty} P(A_n).$$

Remarques 7

a) La proposition précédente reste valable pour un nombre fini d'évènements : si $A_1, \ldots, A_n$ sont des évènements d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, alors on a

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) \leqslant \sum_{k=1}^{n} P(A_k).$$

b) Une réunion dénombrable d'évènements négligeables est encore un évènement négligeable.

Dans toute cette partie, on considère un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. Dans cette partie, on étend les principales notions vues en première année dans le cadre d'un univers fini.

Définition (Probabilité conditionnelle)

Soient A et B deux évènements tels que $P(B) > 0$. On appelle probabilité conditionnelle de A sachant B le nombre

$$P(A \mid B) = P_B(A) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}.$$

Exemple 9

On lance un dé équilibré classique. On désigne par A l'évènement « le résultat du dé est 6 » et par B l'évènement « le résultat du dé est pair ». On a

$$P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{1/6}{1/2} = \frac{1}{3}.$$

Proposition 5

Si B est un évènement tel que $P(B) > 0$, alors l'application $P_B : \mathscr{A} \to [0,1]$ définie par $A \mapsto P_B(A)$ est une probabilité sur l'espace probabilisable $(\Omega, \mathscr{A})$.

Remarque 8

On déduit de la proposition précédente que toutes les propriétés de la proposition 4 sont valables avec la probabilité P_B.

Formule des probabilités composées

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Si $A_1, \ldots, A_n$ sont des événements dont l'intersection est de probabilité non nulle, alors

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1)P(A_2|A_1)P(A_3|A_1 \cap A_2)\cdots P(A_n|A_1 \cap \cdots \cap A_{n-1}).$$

Exemple 10

Une urne contient 4 boules blanches et 5 boules noires indiscernables au toucher. On tire successivement et sans remise trois boules de cette urne. On souhaite déterminer la probabilité que la première boule tirée soit blanche, la seconde noire et la troisième blanche.

Pour tout $i \in [\![1,3]\!]$, on note B_i l'évènement « la i-ème boule tirée est blanche » et N_i l'évènement « la i-ème boule tirée est noire ». Par la formule des probabilités composées, on a

$$P(B_1 \cap N_2 \cap B_3) = P(B_1)P(N_2 \mid B_1)P(B_3 \mid B_1 \cap N_2) = \frac{4}{9} \times \frac{5}{8} \times \frac{3}{7} = \frac{5}{42}.$$

Définition (Système complet d'évènements)

On appelle système complet d'événements toute famille finie ou dénombrable d'événements $(A_i)_{i \in I}$ telle que

(i) les événements $(A_i)_{i \in I}$ sont deux à deux incompatibles,

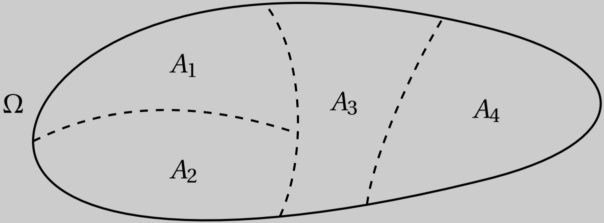
(ii) les événements $(A_i)_{i \in I}$ recouvrent Ω, i.e. $\Omega = \bigcup_{i \in I} A_i$.

Remarque 9

En pratique, on a $I = \mathbb{N}$ ou $I = [\![1, n]\!]$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

Illustration

On peut représenter la notion de système complet d'évènement par la figure ci-dessous.



Formule des probabilités totales

Soit B un événement. Si $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un système complet d'évènements, alors la série $\sum P(B\cap A_n)$ converge et

$$P(B) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(B\cap A_n) = \sum_{n=0}^{+\infty} P(B\,|\,A_n)P(A_n).$$

Remarques 10

a) Pour que la formule précédente est toujours un sens, on convient que $P(B\,|\,A_n)P(A_n) = 0$ lorsque $P(A_n) = 0$.

b) En particulier, si $(A_1, \dots, A_n)$ est un système complet d'évènements, alors on a

$$P(B) = \sum_{k=1}^{n} P(B \cap A_k) = \sum_{k=1}^{n} P(B\,|\,A_k)P(A_k).$$

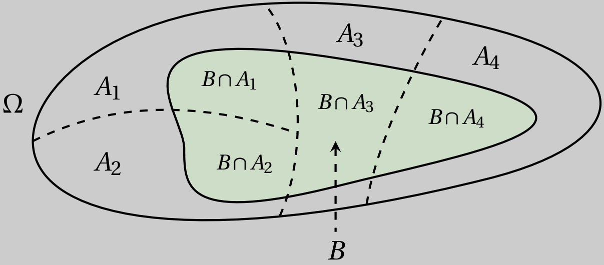
c) La formule des probabilités totales reste valable lorsque $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est pas un système complet d'évènements mais s'ils sont deux à deux incompatibles et vérifient

$$P\left(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n\right) = 1.$$

Dans ce cas, on dit que $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est un système quasi-complet d'événements.

Illustration

En reprenant la figure précédente, nous pouvons représenter la formule des probabilités totales.

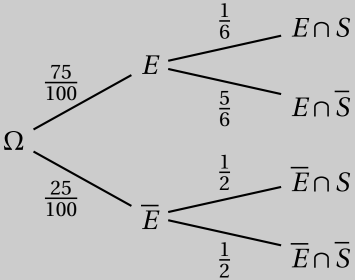


Exemple 11

Un lot de 100 dés contient 75 dés équilibrés et 25 dés pipés donnant 6 avec la probabilité 1/2. On souhaite déterminer la probabilité de faire un six en prenant un dé au hasard dans ce sac.

On note E l'évènement « le dé choisi est équilibré » et S l'évènement « le résultat du dé lancé est 6 ». Comme $(E, \overline{E})$ est un système complet d'évènements, on a par la formule des probabilités totales que

$$\begin{aligned} P(S) &= P(S \mid E)P(E) + P(S \mid \overline{E})P(\overline{E}) \\ &= \frac{1}{6} \times \frac{75}{100} + \frac{1}{2} \times \frac{25}{100} = \frac{1}{4}. \end{aligned}$$



Formule de Bayes

Si A et B sont deux événements de probabilités non nulles, alors

$$P(A \mid B) = \frac{P(B \mid A) P(A)}{P(B)}.$$

Exemple 12

On reprend l'exemple précédent. On suppose que le résultat du dé lancé est 6 et on souhaite déterminer la probabilité que le dé choisi soit équilibré.

Par la formule de Bayes, on a

$$P(E \mid S) = \frac{P(S \mid E) P(E)}{P(S)} = \frac{1}{6} \times \frac{75}{100} \times \frac{4}{1} = \frac{1}{2}.$$

Définition (Indépendance de deux évènements)

Deux évènements A et B de l'espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ sont dits indépendants si $P(A \cap B) = P(A)P(B)$.

Remarque 11

Si B est de probabilité non nulle, l'indépendance de A et B équivaut à $P(A \mid B) = P(A)$. Autrement dit, avoir des informations sur la réalisation de B n'influence pas la réalisation de A.

Exemple 13

On lance un dé équilibré. On désigne par A l'évènement « le résultat du dé est pair » et par B l'évènement « le résultat du dé est un multiple de 3 ». Comme $A \cap B$ est l'évènement « le résultat du dé est 6 », on a

$$P(A \cap B) = \frac{1}{6} = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} = P(A)P(B),$$

donc les évènements A et B sont indépendants.

Proposition 6

Si A et B sont deux évènements indépendants d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, alors les évènements A et $\overline{B}$ sont indépendants.

Remarque 12

Sous les mêmes hypothèses, on en déduit également que $\overline{A}$ et B sont des évènements indépendants et que $\overline{A}$ et $\overline{B}$ sont des évènements indépendants.

Définition (Indépendance d’une famille finie d’évènements)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Des évènements $A_1, \ldots, A_n$ de l’espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ sont dits indépendants si

$$\forall I \subset [\![1, n]\!], \quad P\left(\bigcap_{i \in I} A_i\right) = \prod_{i \in I} P(A_i).$$

Remarques 13

a) Par définition, trois évènements A, B, C de $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ sont indépendants si et seulement si

$$P(A\cap B) = P(A)P(B), \qquad P(B\cap C) = P(B)P(C),$$
$$P(A\cap C) = P(A)P(C), \qquad P(A\cap B\cap C) = P(A)P(B)P(C).$$

b) Si les évènements $A_1, \dots, A_n$ sont indépendants, alors ils sont indépendants deux à deux, i.e.

$$\forall (i,j) \in [\![1,n]\!]^2 \text{ avec } i \neq j, \quad P(A_i \cap A_j) = P(A_i)P(A_j).$$

La réciproque est fausse comme le montre l'exemple suivant.

Exemple 14

On lance un dé tétraédrique équilibré. On désigne par A l'évènement « le résultat du dé est 1 ou 2 », par B l'évènement « le résultat du dé est 1 ou 3 » et par C l'évènement « le résultat du dé est 1 ou 4 ».

Les évènements A, B et C sont deux à deux indépendants car

$$P(A\cap B) = \frac{1}{4} = P(A)P(B), \quad P(B\cap C) = \frac{1}{4} = P(B)P(C), \quad P(A\cap C) = \frac{1}{4} = P(A)P(C),$$

mais ils ne sont pas indépendants car

$$P(A\cap B\cap C) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{8} = P(A)P(B)P(C).$$

Proposition 7

Si $A_1, \ldots, A_n$ sont des évènements indépendants d'un espace probabilisé $(\Omega, \mathscr{A}, P)$, alors les évènements $C_1, \ldots, C_n$ où $C_i \in \{A_i, \overline{A_i}\}$ pour tout $i \in [\![1, n]\!]$ sont indépendants.