TD 5 Espaces probabilisés

Partie I Révisions - Dénombrement

Exercice 1 : Le code d'un cadenas est composé de quatre chiffres allant de 0 à 9.

1. Combien de codes différents sont possibles ?
2. Combien de codes sont composés de quatre chiffres distincts ?
3. Combien de codes sont composés d'au moins deux chiffres identiques ?
4. Combien de codes sont composés avec exactement trois chiffres distincts ?
5. Combien de codes sont composés avec exactement deux chiffres distincts ?

Exercice 2 - Poker : On tire 5 cartes sans remise dans un jeu de 52 cartes.

1. Combien y a-t-il de mains différentes ?
2. Combien y a-t-il de mains avec une suite couleur ?
3. Combien y a-t-il de mains avec un carré ?
4. Combien y a-t-il de mains avec un full ?
5. Combien y a-t-il de mains avec une couleur ?
6. Combien y a-t-il de mains avec une suite ?
7. Combien y a-t-il de mains avec un brelan ?
8. Combien y a-t-il de mains avec une double paire ?
9. Combien y a-t-il de mains avec une paire ?

Exercice 3 : On étudie le nombre d'anagrammes d'un mot donné.

1. Dénombrer les anagrammes du mot « camion » ?
2. Dénombrer les anagrammes du mot « classe » ?
3. Dénombrer les anagrammes du mot « ananas » ?

Exercice 4 - Nombres de Stirling : Pour tout $(n,k) \in \mathbb{N}^2$, on note $S(n,k)$ le nombre de partitions en k parties de l'ensemble $[\![1,n]\!]$. Par convention, on pose $S(0,0)=1$.

1. Soit $(n,k) \in (\mathbb{N}^*)^2$. Déterminer les valeurs de
$$(i)\ \ S(n,0), \qquad (ii)\ \ S(n,1), \qquad (iii)\ \ S(n,n), \qquad (iv)\ \ S(0,k).$$
2. Montrer que pour tout $(n,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}^*$, on a la relation
$$S(n+1,k) = S(n,k-1) + kS(n,k).$$
3. Démontrer que $S(n,2) = 2^{n-1} - 1$ pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$.

Exercice 5 - Nombres de Bell : Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note B_n le nombre de partitions de l'ensemble $[\![1,n]\!]$. Par convention, on a $B_0 = 1$.

1. Calculer les nombres B_1, B_2 et B_3.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a
$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k.$$

Exercice 6 : Soit $(n,p) \in \mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$. On note $F_{n,p}$ l'ensemble des parties de $[\![1,n]\!]$ à p éléments ne contenant pas d'entiers consécutifs.

1. Déterminer le cardinal de $F_{n,p}$ lorsque $p > (n+1)/2$.
2. Montrer que si $\{a_1,\dots,a_p\} \in F_{n,p}$ avec $a_1 < \dots < a_p$, alors l'ensemble
$$\{a_1, a_2-1, \dots, a_k+1-k, \dots, a_n+1-n\}$$
est une partie de $[\![1,n+1-p]\!]$ à p éléments.
3. En déduire le cardinal de $F_{n,p}$.

Partie II Révisions - Espaces probabilisés finis

Exercice 7 : On tire une carte dans un jeu de 52 cartes.

1. Combien de tirages différents sont possibles ?
2. Calculer la probabilité d'obtenir un roi.
3. Calculer la probabilité d'obtenir un cœur.
4. Calculer la probabilité d'obtenir un roi et un cœur.
5. Calculer la probabilité d'obtenir un roi ou un cœur.
6. Reprendre les questions précédentes en supposant que l'on tire deux cartes sans remise dans le jeu (« obtenir un » signifiera « obtenir au moins un »).

Exercice 8 : Une urne contient 8 boules blanches et 2 boules noires. On tire une à une et sans remise trois boules de l'urne.

1. Quelle est la probabilité de tirer au moins une boule noire ?
2. Sachant que l'on a tiré au moins une boule noire, quelle est la probabilité que la première boule soit noire ?

Exercice 9 - Problème du chevalier de Méré : Est-il plus probable d'obtenir un six en lançant 4 fois un dé ou d'obtenir un double six en lançant 24 fois une paire de dés ?

Exercice 10 : Combien de fois faut-il lancer un dé pour avoir au moins une chance sur deux d'obtenir un « six » ?

Exercice 11 : Une pochette contient deux dés. L'un est parfaitement équilibré, mais le second donne un six une fois sur deux (les autres faces étant supposées équilibrées). On tire au hasard un dé de la pochette et on le lance.

1. On obtient un six. Calculer la probabilité que le dé tiré soit équilibré.
2. On a obtenu un cinq. Calculer la probabilité que le dé tiré soit équilibré.

Exercice 12 : Une maladie est présente dans la population avec une fréquence de 10^{-4}. On utilise un test pour dépister la maladie : si une personne est malade, le test est positif à 99%, tandis que si une personne n'est pas malade, le test est positif à $0,1\%$.

1. Calculer la probabilité qu'une personne soit malade si le test est négatif.
2. Calculer la probabilité qu'une personne soit malade si le test est positif.

Exercice 13 : Dans une entreprise, 1% des articles produits sont défectueux. Un contrôle qualité permet de refuser 95% des articles défectueux mais aussi de refuser 2% des articles acceptables.

1. Quelle est la probabilité qu'il y ait une erreur de contrôle ?
2. Quelle est la probabilité qu'un article accepté soit en réalité défectueux ?

Exercice 14 : Une urne A contient 6 boules blanches et 5 boules noires, tandis qu'une urne B contient 4 boules blanches et 8 boules noires. On transfère aléatoirement deux boules de l'urne B dans l'urne A, puis on tire une boule dans l'urne A.

1. Calculer la probabilité que l'on tire une boule blanche.
2. On a tiré une boule blanche. Calculer la probabilité qu'au moins une boule blanche ait été transférée de l'urne B à l'urne A.

Exercice 15 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Une urne contient n boules blanches et n boules rouges. On tire les boules deux par deux et sans remise jusqu'à vider l'urne.

1. Calculer la probabilité p_n que l'on tire à chaque tirage une boule blanche et une boule rouge.
2. Étudier la convergence de la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Interpréter le résultat.

Exercice 16 : On lance successivement $n \in \mathbb{N}^*$ pièces distinctes. On fait l'hypothèse que les lancers sont indépendants et que la k-ième pièce a une probabilité de $(2k+1)^{-1}$ de produire pile pour tout $k \in [\![1,n]\!]$. Quelle est la probabilité que le nombre de piles obtenu soit pair ?

Partie III Espaces probabilisés quelconques

Exercice 17 : Un professeur oublie fréquemment ses clés. On suppose que le premier jour, il les oublie avec une probabilité $p_1 \in [0,1]$. Ensuite, si un jour donné il les oublie, le jour suivant il les oublie avec une probabilité $1/10$. A contrario, s'il ne les oublie pas un jour donné, le lendemain il les oublie avec la probabilité $4/10$. On note p_n la probabilité que le professeur oublie ses clés le n-ième jour.

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer une relation de récurrence entre p_{n+1} et p_n.
2. En déduire une expression de p_n en fonction de p_1 pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
3. Déterminer la limite de la suite $(p_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$. Interpréter le résultat.

Exercice 18 : Un ordinateur génère aléatoirement un nombre entier strictement positif. On suppose qu'il existe un réel $C > 0$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, la probabilité de générer l'entier $n \in \mathbb{N}^*$ est $C \times 2^{-n}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par désigne par G_n l'évènement « le nombre généré est n » et par A_n l'évènement « le nombre généré est un multiple de n ».

1. Déterminer la valeur de la constante C.
2. Calculer la probabilité de l'évènement A_k pour $k \in \mathbb{N}^*$.
3. Les évènements A_2 et A_3 sont-ils indépendants ?

Exercice 19 : On effectue une succession de lancers indépendants d'un dé équilibré jusqu'à l'obtention d'un 6.

1. Pour tout entier $n \in \mathbb{N}^*$, on désigne par A_n l'évènement « le premier 6 apparait au n-ème lancer et tous les résultats obtenus sont distincts de 1 ».
   (a) Calculer la probabilité de A_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
   (b) En déduire la probabilité que tous les résultats soient distincts de 1 au cours de l'expérience.
2. Déterminer de manière analogue la probabilité que tous les nombres obtenus soient pairs.

Exercice 20 : On effectue une succession infinie de lancers indépendants d'un dé équilibré. Pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, on désigne par S_k l'évènement « le résultat du k-ième lancer est 6 ».

1. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer la probabilité d'obtenir au moins un 6 au cours des n premiers lancers.
2. Montrer qu'il est presque sûr d'obtenir un 6.
3. Montrer qu'il est presque sûr d'obtenir une infinité de 6.

Exercice 21 : On lance une pièce équilibrée jusqu'à ce que celle-ci ait produit au moins une fois face et au moins une fois pile. Pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$, on note p_n la probabilité que l'on ait effectué n lancers au total.

1. Calculer p_n pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$.
2. Montrer qu'il est presque sûr de produire au moins un face et un pile.

Exercice 22 : Une urne contient une boule blanche et une boule rouge. On tire dans cette urne une boule, on note sa couleur et on la remet dans l'urne avec deux autres boules de la même couleur puis on répète l'opération.

1. Quelle est la probabilité que les n premières boules tirées soient rouges ?
2. Quelle est la probabilité de tirer indéfiniment des boules rouges ?

Exercice 23 : On considère une succession infinie de lancers indépendants d'une pièce qui a la probabilité $2/3$ de faire pile et $1/3$ de faire face. Pour tout $n \in \mathbb{N}$ vérifiant $n \geqslant 2$, on désigne par A_n l'évènement « on obtient pour la première fois deux piles consécutifs lors du n-ième lancer » et on note $p_n = P(A_n)$.

1. Déterminer p_2, p_3 et p_4.
2. Montrer avec le système complet d'évènements $(F_1, P_1 \cap F_2, P_1 \cap P_2)$ que
$$\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}, \quad p_{n+2} = \frac{1}{3} p_{n+1} + \frac{2}{9} p_n.$$
3. En déduire une expression explicite de p_n pour tout $n \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$.
4. Montrer qu'il est presque sûr d'obtenir deux piles consécutifs.

Exercice 24 : Laure et Benjamin lance à tour de rôle le même dé cubique parfait. Laure joue en premier. Le vainqueur du jeu est le premier qui obtient un 6.

1. (a) Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer la probabilité que Laure gagne avec son n-ième lancer de dé.
   (b) En déduire la probabilité que Laure gagne le jeu.
2. Calculer de manière analogue la probabilité que Benjamin gagne le jeu.
3. Montrer qu'il est presque sûr que le jeu se termine.

Exercice 25 : Deux archers tirent chacun leur tour sur une cible. Le premier qui touche la cible a gagné. Le joueur qui commence à la probabilité $p_1 > 0$ de toucher la cible à chaque tour et le second la probabilité $p_2 > 0$.

1. Quelle est la probabilité que le premier joueur gagne ?
2. Montrer qu'il est presque sûr que le jeu se termine.
3. Pour quelles valeurs de p_1 et p_2 le jeu est-il équitable ?

Exercice 26 : Soient $N \in \mathbb{N}^*$ et $p \in]0,1[$. Une particule se déplace sur $[\![0,N]\!]$ en partant de la position initiale $n \in [\![0,N]\!]$ jusqu'à atteindre 0 ou N. À chaque seconde, la probabilité qu'elle se déplace d'une unité vers la droite est p et celle qu'elle se déplace d'une unité vers la gauche est $q = 1-p$.

1. On note q_n la probabilité que la particule s'arrête en 0 en partant de n.
   (a) Montrer que $q_n = pq_{n+1} + qq_{n-1}$ pour tout $n \in [\![1, N-1]\!]$.
   (b) En déduire une expression de q_n pour tout $n \in [\![1, N-1]\!]$.
2. Calculer la probabilité p_n que la particule s'arrête en N en partant de n.
3. Déterminer la probabilité que la particule ne s'arrête jamais.

Partie IV Un peu de théorie

Exercice 27 : Soient $\mathscr{T}$ une tribu sur un ensemble Ω et Ω' une partie de Ω. Montrer que $\mathscr{T}' = \{A \cap \Omega' \mid A \in \mathscr{T}\}$ est une tribu sur Ω'.

Exercice 28 : Montrer que

$$\mathscr{T} = \{X \subset \mathbb{N} \mid \forall n \in \mathbb{N},\ 2n \in X \Leftrightarrow 2n+1 \in X\}$$

est une tribu sur $\mathbb{N}$.

Exercice 29 : Soient A, B, C des événements d'un espace probabilisé. Montrer que l'on a la relation

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) \\ - P(A\cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C).$$

Exercice 30 : Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'évènements indépendants d'un espace probabilisé.

1. Montrer que $P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = 1 - \lim_{n\to+\infty} \prod_{k=0}^{n} P\left(\overline{A_k}\right)$.
2. On suppose que $P(A_n) \neq 1$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Montrer les équivalences.

$$P\left(\bigcup_{n=0}^{+\infty} A_n\right) = 1 \ \Leftrightarrow\ \sum \ln\left(P\left(\overline{A_n}\right)\right) \text{ diverge } \Leftrightarrow\ \sum P(A_n) \text{ diverge.}$$

Exercice 31 - Lemme de Borel-Cantelli : Soit $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'évènements telle que la série $\sum P(A_n)$ est convergente. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note

$$D_n = \bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k \quad \text{et} \quad A = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} \bigcup_{k=n}^{+\infty} A_k.$$

1. Montrer que $\lim_{n\to+\infty} P(D_n) = 0$.
2. Montrer que $P(A) = 0$. Interpréter le résultat.