

CHAPITRE 11

Espaces préhilbertiens réels

Jérôme VON BUHREN

<http://vonbuhren.free.fr>

Lycée Couffignal - PT*

Un espace préhilbertien réel est un espace vectoriel réel dans lequel on dispose d'une opération algébrique supplémentaire permettant d'associer un nombre réel à chaque couple de vecteurs : un produit scalaire. Cette nouvelle application permet d'étendre les notions traditionnelles de géométrie euclidienne du plan et de l'espace à un espace vectoriel réel quelconque : les longueurs, les angles, l'orthogonalité et la projection orthogonale. Le préfixe « pré » dans le mot « préhilbertien » fait référence à l'absence d'une hypothèse particulière : la complétude. Lorsque cette hypothèse supplémentaire est vérifiée, l'espace porte le nom d'espace hilbertien ou d'espace de Hilbert en référence au mathématicien allemand David Hilbert.

Les espaces préhilbertiens interviennent dans de nombreux domaines de la physique. Ils sont par exemple au cœur de la théorie de la mécanique quantique. D'autre part, ils permettent d'introduire de nombreux outils pour étudier les équations aux dérivées partielles qui sont omniprésentes dans les problèmes de la physique. En mathématiques, la généralisation des notions de produit scalaire et de projection orthogonale nous permettra de construire la théorie des séries de Fourier dans un futur chapitre.

Dans ce chapitre, nous commencerons par définir la notion générale de produit scalaire sur un espace vectoriel réel. Dans un second temps, nous étudierons l'orthogonalité dans ce nouveau cadre, puis finalement nous généraliserons la notion de projection orthogonale avec ses propriétés classiques.

Dans tout le chapitre, on fixe un espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$.

Définition (Produit scalaire)

Une application $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ est un produit scalaire si elle vérifie les conditions suivantes.

- (i) Linéaire à gauche : pour tout $y \in E$, l'application $x \mapsto \varphi(x, y)$ est linéaire,
- (ii) Linéaire à droite : pour tout $x \in E$, l'application $y \mapsto \varphi(x, y)$ est linéaire,
- (iii) Symétrique : pour tout $(x, y) \in E^2$, on a $\varphi(x, y) = \varphi(y, x)$,
- (iv) Positive : pour tout $x \in E$, on a $\varphi(x, x) \geq 0$,
- (v) Définie : si $x \in E$ vérifie $\varphi(x, x) = 0$, alors $x = 0_E$.

Remarque 1

Si la condition (iii) est vérifiée, alors les conditions (i) et (ii) sont équivalentes.

Notation

Une fois que l'on a choisit un produit scalaire φ sur l'espace vectoriel E , on désigne le produit scalaire de deux vecteurs $x \in E$ et $y \in E$ par $(x | y)$, $\langle x | y \rangle$ ou $x \cdot y$.

Remarque 2

On peut munir un espace vectoriel réel de plusieurs produits scalaires. Les notions que nous allons voir dans la suite de ce chapitre dépendent entièrement du produit scalaire choisi.

Exemples 1

a) Le produit scalaire euclidien canonique sur $E = \mathbb{R}^n$ est défini par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \quad \varphi(x, y) = \sum_{i=1}^n x_i y_i.$$

b) Si $E = \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ avec $a < b$, l'application $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall (f, g) \in \mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})^2, \quad \varphi(f, g) = \int_a^b f(t)g(t) dt$$

est un produit scalaire sur $\mathcal{C}^0([a, b], \mathbb{R})$.

c) Si $E = \mathbb{R}[X]$, l'application $\varphi : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall (P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2, \quad \varphi(P, Q) = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)e^{-t} dt$$

est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

Remarque 3

Si on identifie les éléments de $\mathbb{R}^n$ aux matrices colonnes de $\mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, alors le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$ s'écrit sous la forme

$$\forall (X, Y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \quad (X | Y) = X^\top Y.$$

Définition (Espace préhilbertien réel)

Un espace préhilbertien réel est un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire.

Définition (Espace euclidien)

Un espace euclidien est un espace vectoriel réel de dimension finie muni d'un produit scalaire.

Dans cette sous-partie, on considère un espace préhilbertien E .

Définition (Norme associée à un produit scalaire)

La norme associée au produit scalaire de l'espace préhilbertien E est l'application $\| \cdot \| : E \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in E, \quad \|x\| = \sqrt{(x | x)}.$$

Exemple 2

La norme associée au produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$ est

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \|x\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}.$$

Proposition 1

La norme $\| \cdot \| : E \rightarrow \mathbb{R}$ vérifie les propriétés suivantes.

- (i) Positivité : pour tout $x \in E$, on a $\|x\| \geq 0$,
- (ii) Séparation : pour tout $x \in E$, on a $\|x\| = 0$ si et seulement si $x = 0_E$,
- (iii) Homogénéité : pour tout $x \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $\|\lambda x\| = |\lambda| \times \|x\|$.

Proposition 2

Pour tout $(x, y) \in E^2$, on a les relations

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2(x | y) + \|y\|^2 \quad \text{et} \quad \|x - y\|^2 = \|x\|^2 - 2(x | y) + \|y\|^2.$$

Remarque 4

On en déduit l'identité de polarisation :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad (x | y) = \frac{1}{2} (\|x + y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2).$$

Proposition (Inégalité de Cauchy-Schwarz)

Pour tout $(x, y) \in E^2$, on a l'inégalité

$$|(x | y)| \leq \|x\| \|y\|.$$

De plus, on a égalité si et seulement si les vecteurs x et y sont colinéaires.

Proposition (Inégalité triangulaire)

Pour tout $(x, y) \in E^2$, on a l'inégalité

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|.$$

De plus, on a égalité si et seulement si $x = 0$ ou s'il existe $\lambda \geq 0$ tel que $y = \lambda x$.

Définition (Distance associée à un produit scalaire)

La distance associée à un produit scalaire sur E est l'application $d: E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad d(x, y) = \|x - y\|.$$

Dans cette partie, on considère un espace préhilbertien E .

Définition (Vecteurs orthogonaux)

Deux vecteurs $x \in E$ et $y \in E$ sont dits orthogonaux si $(x | y) = 0$.

Exemples 3

On reprend les espaces préhilbertiens de l'exemple 1.

- a) Les vecteurs $(1, -1, 0, \dots, 0)$ et $(1, 1, 0, \dots, 0)$ sont orthogonaux.
- b) Les fonctions $t \mapsto 1$ et $t \mapsto t - 1/2$ sont orthogonales.
- c) Les polynômes X et $X - 2$ sont orthogonaux.

Théorème de Pythagore

Deux vecteurs $x \in E$ et $y \in E$ sont orthogonaux si et seulement si

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Définition (Sous-espaces orthogonaux)

Deux sous-espaces vectoriels F et G de E sont dits orthogonaux si tous les vecteurs de F sont orthogonaux à tous les vecteurs de G , i.e.

$$\forall (x, y) \in F \times G, \quad (x | y) = 0.$$

Exemple 4

Si on munit l'espace vectoriel $E = \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire $(A, B) \mapsto \text{tr}(A^\top B)$, alors les sous-espaces vectoriels $\mathcal{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathcal{A}_n(\mathbb{R})$ sont orthogonaux.

Définition (Orthogonal d'un sous-espace vectoriel)

Soit F un sous-espace vectoriel de E . L'orthogonal de F est l'ensemble des vecteurs de E orthogonaux à tous les vecteurs de F , i.e.

$$F^\perp = \{x \in E \mid \forall y \in F, (x \mid y) = 0\}.$$

Proposition 3

Soit F un sous-espace vectoriel de E .

- (i) L'ensemble $F^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E .
- (ii) Si $(v_1, \dots, v_p)$ est une base de F , alors

$$F^\perp = \{x \in E \mid \forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, (x \mid v_k) = 0\}.$$

Exemple 5

Dans $E = \mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire euclidien canonique, l'orthogonal de

$$H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$$

est la droite $H^\perp = \text{Vect}((1, 1, 1))$.

Théorème 1

Si E est un espace euclidien et si F est un sous-espace vectoriel de E , alors

$$\dim(E) = \dim(F) + \dim(F^\perp).$$

Exemple 6

Dans l'exemple précédent, on a $\dim(H) = 2$, donc $\dim(H^\perp) = 1$.

Définition (Famille orthogonale)

Une famille $(u_i)_{i \in I}$ de vecteurs de E est dite orthogonale si ses vecteurs sont orthogonaux deux à deux, i.e.

$$\forall (i, j) \in I^2 \text{ avec } i \neq j, \quad (u_i | u_j) = 0.$$

Définition (Famille orthonormée)

Une famille $(u_i)_{i \in I}$ de vecteurs de E est dite orthonormée (ou orthonormale) si elle est orthogonale et que $\|u_i\| = 1$ pour tout indice $i \in I$.

Exemple 7

La base canonique de $\mathbb{R}^n$ est une base orthonormée pour le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$.

Proposition 4

Toute famille orthogonale (finie) de vecteurs non nuls est libre.

Théorème 2

Si E est un espace euclidien dont $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormée, alors on a

$$\forall x \in E, \quad x = \sum_{k=1}^n (x | e_k) e_k.$$

Remarque 5

Autrement dit, les coordonnées du vecteur x dans la base $(e_1, \dots, e_n)$ sont $(x | e_1), \dots, (x | e_n)$.

Théorème 3

On suppose que E est un espace euclidien dont $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormée. Pour tout couple de vecteurs $(x, y) \in E^2$, si on note

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \quad \text{et} \quad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{n,1}(\mathbb{R})$$

les coordonnées respectives des vecteurs x et y dans la base $\mathcal{B}$, alors on a

$$(x | y) = \sum_{k=1}^n x_k y_k = \sum_{k=1}^n (x | e_k)(y | e_k) = X^\top Y \quad \text{et}$$

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^n x_k^2 = \sum_{k=1}^n (x | e_k)^2 = X^\top X.$$

Remarque 6

Autrement dit, une fois que l'on a choisi une base orthonormée d'un espace euclidien E , on est ramené à travailler dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique.

Théorème de Gram-Schmidt

Soit $(v_1, \dots, v_p)$ une famille libre de vecteurs de E . Il existe une unique famille orthonormale $(e_1, \dots, e_p)$ vérifiant

$$\forall k \in \llbracket 1, p \rrbracket, \quad \text{Vect}(v_1, \dots, v_k) = \text{Vect}(e_1, \dots, e_k) \quad \text{et} \quad (e_k | v_k) > 0.$$

Remarque 7

La démonstration du théorème ci-dessus est basée sur l'algorithme de Gram-Schmidt qui est détaillé dans la dernière partie.

Corollaire 1

Si E est un espace euclidien, alors il existe une base orthonormée de E .

Dans cette partie, on considère un espace préhilbertien E .

Proposition 5

Si F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E , alors on a la décomposition $E = F \oplus F^\perp$.

ATTENTION

L'hypothèse de dimension finie est importante : on n'a pas $E = F + F^\perp$ en général.

Remarque 8

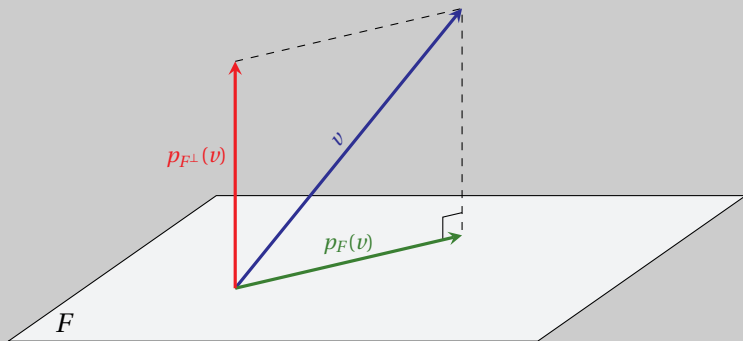
On en déduit que si H est un hyperplan d'un espace euclidien E , alors le sous-espace $H^\perp$ est une droite vectorielle. Tout élément non nul $a \in H^\perp$ est appelé un vecteur normal à H .

Définition (Projection orthogonale)

Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E . La projection orthogonale sur F est le projecteur $p_F : E \rightarrow E$ sur F parallèlement à $F^\perp$.

Illustration

La figure suivante représente géométriquement le projeté orthogonal d'un vecteur $v \in E$ sur F .



Remarques 9

- a) On a la relation $p_F + p_{F^\perp} = \text{Id}_E$.
- b) Le projeté orthogonal d'un vecteur $v \in E$ sur F est l'unique vecteur $f \in F$ tel que $v - f \in F^\perp$.

Exemple 8

On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique. Déterminons la projection orthogonale d'un vecteur $v \in \mathbb{R}^3$ sur le sous-espace vectoriel

$$H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}.$$

Par définition, la projection orthogonale du vecteur v sur H est caractérisée par les deux conditions

$$p_H(v) \in H \quad \text{et} \quad v - p_H(v) \in H^\perp.$$

Exemple 8

En notant $v = (x, y, z)$ et $(a, b, c) = p_H(v)$ et en remarquant que $H = \text{Vect}(h_1, h_2)$ avec $h_1 = (1, -1, 0)$ et $h_2 = (1, 0, -1)$, les deux conditions précédentes sont équivalentes au système linéaire

$$\left\{ \begin{array}{l} p_H(v) \in H \\ (v - p_H(v) \mid h_1) = 0 \\ (v - p_H(v) \mid h_2) = 0 \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a + b + c = 0 \\ (x - a) - (y - b) = 0 \\ (x - a) - (z - c) = 0 \end{array} \right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} a = \frac{2x - y - z}{3} \\ b = \frac{-x + 2y - z}{3} \\ c = \frac{-x - y + 2z}{3} \end{array} \right.$$

Exemple 8

On conclut que le projeté orthogonal de $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ sur H est

$$p_H(x, y, z) = \left(\frac{2x - y - z}{3}, \frac{-x + 2y - z}{3}, \frac{-x - y + 2z}{3} \right).$$

Proposition (Expression du projeté orthogonal dans une base...)

Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E . Si $(e_1, \dots, e_p)$ est une base orthonormée de F , alors

$$\forall v \in E, \quad p_F(v) = \sum_{i=1}^p (v | e_i) e_i.$$

Exemple 9

En reprenant l'exemple précédent, on obtient avec l'algorithme de Gram-Schmidt appliqué à (h_1, h_2) qu'une base orthonormée du sous-espace vectoriel H de $\mathbb{R}^3$ est (e_1, e_2) avec

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad e_2 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

On en déduit avec la proposition précédente que pour tout $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on a

$$p_H(v) = (v | e_1)e_1 + (v | e_2)e_2 = \frac{x-y}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{x+y-2z}{6} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2x-y-z \\ -x+2y-z \\ -x-y+2z \end{pmatrix}.$$

Remarque 10

Si on a $\dim(F^\perp) < \dim(F)$ et que l'on dispose d'une base du sous-espace vectoriel $F^\perp$, alors il est plus rapide de calculer le projecteur $p_{F^\perp}$ avec la formule précédente, puis d'en déduire le projecteur p_F avec la relation $p_F = \text{Id}_E - p_{F^\perp}$.

Exemple 10

En reprenant l'exemple précédent, on obtient directement qu'une base orthonormée de la droite vectorielle $D = H^\perp = \text{Vect}((1, 1, 1))$ est le vecteur e avec

$$e = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Exemple 10

On en déduit avec la proposition précédente que pour tout vecteur $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on a

$$p_D(v) = (v | e)e = \frac{x+y+z}{3} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} x+y+z \\ x+y+z \\ x+y+z \end{pmatrix}.$$

On conclut que pour tout vecteur $v = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, on a

$$p_H(v) = v - p_D(v) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} x+y+z \\ x+y+z \\ x+y+z \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2x-y-z \\ -x+2y-z \\ -x-y+2z \end{pmatrix}.$$

Remarque 11

Si a est un vecteur normal d'un hyperplan H dans un espace euclidien E , alors le projecteur orthogonal sur H est donné par

$$\forall v \in E, \quad p_H(v) = v - \frac{(v | a)}{\|a\|^2} a.$$

Définition (Distance d'un vecteur à un sous-espace vectoriel)

La distance d'un vecteur $v \in E$ à un sous espace vectoriel F de E est le nombre

$$d(v, F) = \inf_{f \in F} \|v - f\| = \inf_{f \in F} d(v, f).$$

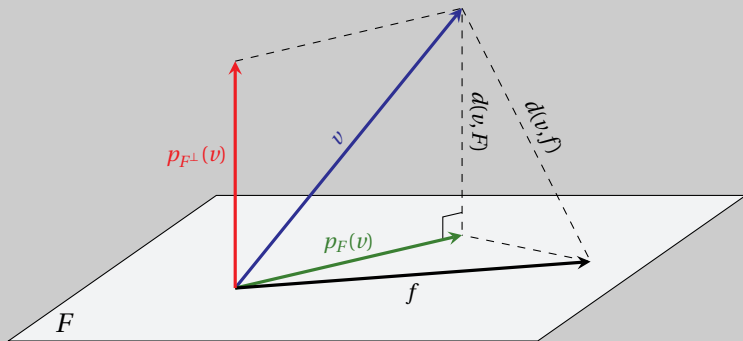
Théorème 4

Soit $v \in E$. Si F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E , alors

$$d(v, F) = \|v - p_F(v)\| = \|p_{F^\perp}(v)\|.$$

Illustration

On peut représenter géométriquement le théorème sur la figure suivante.



Exemple 11

On souhaite calculer la distance du vecteur $(1, 0, 0)$ au sous-espace vectoriel

$$H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$$

de $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique. En reprenant l'expression du projecteur calculé précédemment, on a

$$d((1, 0, 0), H) = \|(1, 0, 0) - p_H(1, 0, 0)\| = \left\| (1, 0, 0) - \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3} \right) \right\| = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Remarque 12

Si a est un vecteur normal d'un hyperplan H dans un espace euclidien E , alors la distance de H à un vecteur $v \in E$ est

$$d(v, H) = \frac{|(v | a)|}{\|a\|}.$$

On retrouve la formule connue dans le cas des espaces euclidiens $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.

On considère une famille libre $(v_1, \dots, v_p)$ d'un espace préhilbertien E . Dans cette partie, on présente l'algorithme de Gram-Schmidt qui permet de construire la famille orthonormée $(e_1, \dots, e_p)$ du théorème de Gram-Schmidt à partir de la famille libre $(v_1, \dots, v_p)$.

On commence par construire une famille orthogonale $(u_1, \dots, u_p)$ de E vérifiant les conditions du théorème.

- 1) On pose $u_1 = v_1$.
- 2) On cherche le vecteur u_2 sous la forme

$$u_2 = v_2 + au_1 \quad \text{avec} \quad a \in \mathbb{R}.$$

On souhaite que u_2 et u_1 soit orthogonaux, i.e.

$$(u_2 \mid u_1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (v_2 \mid u_1) + a(u_1 \mid u_1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = -\frac{(v_2 \mid u_1)}{(u_1 \mid u_1)},$$

ce qui permet de calculer u_2 .

- 3) On itère le procédé : si on a construit $(u_1, \dots, u_{k-1})$, on cherche le vecteur u_k sous la forme

$$u_k = v_k + \lambda_1 u_1 + \dots + \lambda_{k-1} u_{k-1} \quad \text{avec} \quad \lambda_1, \dots, \lambda_{k-1} \in \mathbb{R}.$$

Pour chaque indice $i \in \llbracket 1, k-1 \rrbracket$, on souhaite que le vecteur u_k soit orthogonal à u_i , i.e.

$$(u_k | u_i) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (v_k | u_i) + \lambda_i (u_i | u_i) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_i = -\frac{(v_k | u_i)}{(u_i | u_i)},$$

ce qui permet de calculer u_k .

- 4) A la fin du procédé, on a construit une famille orthogonale $(u_1, \dots, u_p)$ de vecteurs non nuls vérifiant les conditions du théorème de Gram-Schmidt. On en déduit la famille orthonormée $(e_1, \dots, e_p)$ cherchée en normalisant les vecteurs u_i

$$\forall i \in \llbracket 1, p \rrbracket, \quad e_i = \frac{u_i}{\|u_i\|}.$$

Exemple 12

On cherche une base orthonormée de l'espace vectoriel

$$H = \text{Vect}(v_1, v_2) \quad \text{où} \quad v_1 = (1, 0, 1) \text{ et } v_2 = (1, 1, 0)$$

muni de la restriction du produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^3$. On applique l'algorithme de Gram-Schmidt en partant de la base (v_1, v_2) de H .

1) On pose $u_1 = v_1 = (1, 0, 1)$.

Exemple 12

2) On cherche le vecteur u_2 sous la forme

$$u_2 = v_2 + au_1 \quad \text{avec} \quad a \in \mathbb{R}.$$

On souhaite que u_2 et u_1 soit orthogonaux, i.e.

$$(u_2 \mid u_1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (v_2 \mid u_1) + a(u_1 \mid u_1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = -\frac{(v_2 \mid u_1)}{(u_1 \mid u_1)} = -\frac{1}{2}.$$

On en déduit que

$$u_2 = v_2 - \frac{1}{2}u_1 = \left(\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}\right).$$

Exemple 12

- 3) La famille (u_1, u_2) est une base orthogonale de H et on en déduit une base orthonormée (e_1, e_2) de H avec

$$e_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}} \right), \quad e_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}} \right).$$

Exemple 13

On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}_2[X]$ muni du produit scalaire

$$(P, Q) \mapsto (P | Q) = \int_{-1}^1 P(t) Q(t) dt.$$

Nous allons construire une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[X]$ en appliquant l'algorithme de Gram-Schmidt en partant de la base $(V_0, V_1, V_2) = (1, X, X^2)$.

1) On pose $U_0 = V_0 = 1$.

Exemple 13

2) On cherche le polynôme U_1 sous la forme

$$U_1 = V_1 + aU_0 \quad \text{avec} \quad a \in \mathbb{R}.$$

On souhaite que U_0 et U_1 soit orthogonaux, i.e.

$$(U_1 | U_0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (V_1 | U_0) + a(U_0 | U_0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = -\frac{(V_1 | U_0)}{(U_0 | U_0)} = 0.$$

On en déduit que $U_1 = X$.

Exemple 13

3) On cherche le polynôme U_2 sous la forme

$$U_2 = V_2 + bU_1 + cU_0 \quad \text{avec} \quad b, c \in \mathbb{R}.$$

On souhaite que U_2 soit orthogonal à U_0 et U_1 , donc

$$(U_2 \mid U_0) = 0 \Leftrightarrow (V_2 \mid U_0) + c(U_0 \mid U_0) = 0 \Leftrightarrow c = -\frac{(V_2 \mid U_0)}{(U_0 \mid U_0)} = -\frac{1}{3}.$$

$$(U_2 \mid U_1) = 0 \Leftrightarrow (V_2 \mid U_1) + b(U_1 \mid U_1) = 0 \Leftrightarrow b = -\frac{(V_2 \mid U_1)}{(U_1 \mid U_1)} = 0.$$

On en déduit que $U_2 = X^2 - 1/3$.

Exemple 13

- 4) La famille (U_0, U_1, U_2) est une base orthogonale de $\mathbb{R}_2[X]$ et on en déduit une base orthonormée (E_0, E_1, E_2) de l'espace euclidien $\mathbb{R}_2[X]$ avec

$$E_0 = \frac{U_0}{\|U_0\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad E_1 = \frac{U_1}{\|U_1\|} = \sqrt{\frac{3}{2}}X, \quad E_2 = \frac{U_2}{\|U_2\|} = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}(3X^2 - 1).$$