TD 11 Espaces préhilbertiens réels

Partie I Produit scalaire et norme

Exercice 1 : On note $E = \mathscr{C}^1([0,1],\mathbb{R})$ et on définit $\varphi : E^2 \to \mathbb{R}$ par

$$\forall (f,g) \in E^2, \quad \varphi(f,g) = f(0)g(0) + \int_0^1 f'(t)g'(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que φ est un produit scalaire sur E.
2. Calculer le produit scalaire $(\cos \mid \sin)$ et $(\mathrm{Id} \mid \exp)$.
3. Calculer les normes $\|\cos\|, \|\sin\|, \|\exp\|$.
4. Écrire l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour ce produit scalaire.

Exercice 2 : On note $E = \mathbb{R}_2[X]$ et on définit $\varphi : E^2 \to \mathbb{R}$ par

$$\forall (P,Q) \in E^2, \quad \varphi(P,Q) = P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + P(2)Q(2).$$

1. Montrer que φ est un produit scalaire sur E.
2. Calculer $(X^2+1 \mid X^2+X+1)$ et $(X^2-3X \mid 2X-1)$.
3. Calculer $\|X^2+1\|$, $\|X^2+X+1\|$ et $\|2X^2-5X\|$.

Exercice 3 : Soient $E = \mathbb{R}^2$ et $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$. On définit $\varphi : E^2 \to \mathbb{R}$ par

$$\varphi((x_1,x_2),(y_1,y_2)) = ax_1y_1 + bx_1y_2 + cx_2y_1 + dx_2y_2.$$

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur $(a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$ pour que φ soit un produit scalaire sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 4 : Soient E un espace préhilbertien réel, $a \in E$ un vecteur unitaire et un scalaire $k \in \mathbb{R}$. On définit $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ par

$$\forall (x,y) \in E^2, \quad \varphi(x,y) = (x \mid y) + k(x \mid a)(y \mid a).$$

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur k pour que φ soit un produit scalaire sur E.

Exercice 5 : Soit E un espace préhilbertien réel. Montrer que

$$\forall (x,y) \in E^2, \quad 2 + \|x+y\|^2 \leqslant 2\left(1+\|x\|^2\right)\left(1+\|y\|^2\right).$$

Exercice 6 : Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $x^2+y^2+z^2 \leqslant 1$.

1. Montrer que $(x+2y+3z)^2 \leqslant 14$.
2. Étudier le cas d'égalité.

Exercice 7 : Soit $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ tel que $2x^2+y^2+5z^2 \leqslant 1$.

1. Montrer que $(x+y+z)^2 \leqslant 17/10$.
2. Étudier le cas d'égalité.

Exercice 8 : Soit $(x_1,\dots,x_n) \in \mathbb{R}^n$.

1. Montrer que
$$\left(\sum_{k=1}^n x_k\right)^2 \leqslant n \sum_{k=1}^n x_k^2.$$
2. Étudier le cas d'égalité.

Exercice 9 : Soit $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ continue et positive. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note

$$I_n = \int_0^1 t^n f(t)\,\mathrm{d}t.$$

Montrer que pour tout $(m,n) \in \mathbb{N}^2$, on a $I_{m+n}^2 \leqslant I_{2m}I_{2n}$.

Partie II Orthogonalité

Exercice 10 : On munit $\mathbb{R}^4$ du produit scalaire canonique. On considère les sous-espaces vectoriels

$$F = \text{Vect}\big((1,0,1,-1),(0,1,1,0)\big), \quad G = \text{Vect}\big((1,-2,1,0),(1,0,0,-1)\big).$$

1. Déterminer l'orthogonal des sous-espaces vectoriels F et G.
2. Déterminer une base orthonormée des sous-espaces vectoriels F et G.

Exercice 11 : On définit un produit scalaire $\varphi : E^2 \to \mathbb{R}$ sur $E = \mathbb{R}_2[X]$ par

$$\forall (P,Q) \in E^2, \quad \varphi(P,Q) = P(0)Q(0) + P(1)Q(1) + P(2)Q(2).$$

On considère également les ensembles

$$F = \{P \in \mathbb{R}_2[X] \mid P(0) = 0\} \quad \text{et} \quad G = \left\{P \in \mathbb{R}_2[X] \;\middle|\; \int_0^1 P(t)\,\mathrm{d}t = 0\right\}.$$

1. Montrer que F et G sont des sous-espaces vectoriels de E.
2. Déterminer une base de F et une base de G.
3. Déterminer l'orthogonal de F et l'orthogonal de G.
4. Montrer que $\mathscr{B} = \big(X(X-1), X(X-2), (X-1)(X-2)\big)$ est une base orthogonale de E. En déduire une base orthonormée de E.

Exercice 12 : On note $E = \mathbb{R}_2[X]$ et on considère le produit scalaire

$$\forall (P,Q) \in E^2, \quad (P \mid Q) = \int_0^1 P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t.$$

Déterminer une base orthonormée de E.

Exercice 13 : On définit $\varphi : \mathscr{M}_n(\mathbb{R})^2 \to \mathbb{R}$ par

$$\forall (A,B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})^2, \quad \varphi(A,B) = \text{tr}\left(A^\top B\right).$$

1. Montrer que φ est un produit scalaire sur $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$.
2. Montrer que $\mathscr{M}_n(\mathbb{R}) = \mathscr{S}_n(\mathbb{R}) \overset{\perp}{\oplus} \mathscr{A}_n(\mathbb{R})$.
3. Montrer que pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$, on a $\text{tr}(A)^2 \leqslant n\text{tr}(A^\top A)$. Préciser les cas d'égalité.
4. Montrer que $F = \{M \in \mathscr{M}_n(\mathbb{R}) \mid \text{tr}(M) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de l'espace vectoriel $\mathscr{M}_n(\mathbb{R})$. Préciser sa dimension.
5. Déterminer $F^\perp$.

Exercice 14 : Pour tout $(P,Q) \in \mathbb{R}[X]^2$, on définit

$$\varphi(P,Q) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}t}\right) Q\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}t}\right)\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que pour tout $(P,Q) \in \mathbb{R}[X]^2$, on a $\varphi(P,Q) \in \mathbb{R}$.
2. Montrer que $\varphi : \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}$ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
3. Montrer que $(X^n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base orthonormée de $\mathbb{R}[X]$.

Exercice 15 : Soient F et G deux sous-espaces vectoriels d'un espace préhilbertien réel E. Montrer que

1. $(F+G)^\perp = F^\perp \cap G^\perp$
2. $F^\perp + G^\perp \subset (F \cap G)^\perp$ avec égalité si E est euclidien.
3. $F \subset (F^\perp)^\perp$ avec égalité si E est euclidien.

Exercice 16 : Soit E un espace préhilbertien réel. Soit $(u,v) \in E^2$ vérifiant

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad \|u + tv\| \geqslant \|u\|.$$

Montrer que u et v sont orthogonaux.

Exercice 17 : Soient E un espace euclidien et $u \in \mathscr{L}(E)$ vérifiant

$$\forall x \in E, \quad (u(x) \mid x) = 0.$$

1. Montrer que $(u(x) \mid y) = -(x \mid u(y))$ pour tout $(x, y) \in E^2$.
2. Montrer que $E = \mathrm{Ker}(u) \overset{\perp}{\oplus} \mathrm{Im}(u)$.

Exercice 18 : Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base orthonormée d'un espace euclidien E. Pour tout endomorphisme $f \in \mathscr{L}(E)$, montrer que

$$\mathrm{tr}(f) = \sum_{i=1}^{n} (f(e_i) \mid e_i).$$

Exercice 19 : Soit E un espace euclidien, et $(e_1, \dots, e_n)$ une famille de n vecteurs unitaires de E tels que, pour tout $x \in E$, on a

$$\|x\|^2 = \sum_{k=1}^{n} (x \mid e_k)^2.$$

Démontrer que $(e_1, \dots, e_n)$ est une base orthonormée de E.

Exercice 20 - Polynômes de Legendre : On définit $\varphi : \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}$ par

$$\forall (P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2, \quad \varphi(P, Q) = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit le n-ième polynôme de Legendre par

$$P_n(X) = \left[(X^2 - 1)^n\right]^{(n)}.$$

1. Montrer que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
2. Montrer que $(P_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}[X]$.
3. Montrer pour tout $n \in \mathbb{N}$ que

$$\|P_n\| = 2^n \cdot n! \cdot \sqrt{\frac{2}{2n+1}}.$$

Exercice 21 - Polynômes de Laguerre : On définit $\varphi : \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}$ par

$$\forall (P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2, \quad \varphi(P, Q) = \int_{0}^{+\infty} P(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t.$$

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on définit $h_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ par $h_n(x) = x^n \mathrm{e}^{-x}$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

1. Montrer que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique polynôme $L_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad h_n^{(n)}(x) = L_n(x)\mathrm{e}^{-x}.$$

3. Montrer que $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}[X]$.
4. Montrer pour tout $n \in \mathbb{N}$ que $\|L_n\| = n!$.

Exercice 22 - Polynômes de Tchebychev : On définit $\varphi : \mathbb{R}[X] \times \mathbb{R}[X] \to \mathbb{R}$ par

$$\forall (P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2, \quad \varphi(P, Q) = \int_{-1}^{1} \frac{P(t)Q(t)}{\sqrt{1-t^2}}\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un unique polynôme $T_n \in \mathbb{R}[X]$ tel que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad T_n(\cos(x)) = \cos(nx).$$

3. Montrer que $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une base orthogonale de $\mathbb{R}[X]$.
4. Montrer que $\|T_0\| = \sqrt{\pi}$ et que $\|T_n\| = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 23 : On note $E = \mathscr{C}([0,1], \mathbb{R})$ et on définit l'application $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ par

$$\forall (f, g) \in E^2, \quad \varphi(f, g) = \int_{0}^{1} f(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

1. Montrer que φ est un produit scalaire sur E.
2. Montrer que $F = \{f \in E \mid f(0) = 0\}$ est un sous-espace vectoriel de E.
3. Montrer que $F^\perp = \{0\}$.

Partie III Projection orthogonale

Exercice 24 : On munit $\mathbb{R}^3$ du produit scalaire canonique.

1. Déterminer la projection orthogonale sur H d'équation $x-2y+z=0$.
2. Calculer la distance de $(a,b,c)\in\mathbb{R}^3$ au plan H.

Exercice 25 : On munit $\mathbb{R}^4$ du produit scalaire canonique.

1. Déterminer la projection orthogonale sur le sous-espace vectoriel F d'équations
$$\begin{cases} x+y+z+t &= 0 \\ x-y+z-t &= 0. \end{cases}$$
2. Calculer la distance de $(a,b,c,d)\in\mathbb{R}^4$ au sous-espace vectoriel F.

Exercice 26 : On munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire canonique. On considère un élément non nul $(a_1,\dots,a_n)\in\mathbb{R}^n$ et l'hyperplan

$$H=\left\{(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n \mid a_1x_1+\cdots+a_nx_n=0\right\}.$$

Montrer que pour tout $y\in\mathbb{R}^n$, on a

$$d(y,H)=\frac{|a_1y_1+\cdots+a_ny_n|}{\sqrt{a_1^2+\cdots+a_n^2}}.$$

Exercice 27 : On considère le produit scalaire $\varphi: E^2\to\mathbb{R}$ sur $E=\mathbb{R}_2[X]$ défini par

$$\forall (P,Q)\in E^2,\quad \varphi(P,Q)=P(0)Q(0)+P(1)Q(1)+P(2)Q(2).$$

1. Déterminer une base orthonormée de $\mathbb{R}_1[X]$.
2. Déterminer la projection orthogonal de $P=aX^2+bX+c\in\mathbb{R}_2[X]$ sur $\mathbb{R}_1[X]$.
3. Calculer la distance de X^2 à $\mathbb{R}_1[X]$.

Exercice 28 : Soient $n\in\mathbb{N}$ et $a_0,\dots,a_n\in\mathbb{R}$ des nombres deux à deux distincts. On définit une application $\varphi:\mathbb{R}_n[X]\times\mathbb{R}_n[X]\to\mathbb{R}$ par

$$\forall (P,Q)\in\mathbb{R}_n[X]^2,\quad \varphi(P,Q)=\sum_{k=0}^{n}P(a_k)Q(a_k).$$

1. Montrer que φ est un produit scalaire sur $\mathbb{R}_n[X]$.
2. Calculer la distance d'un polynôme $Q\in\mathbb{R}_n[X]$ au sous-espace vectoriel
$$H=\left\{P\in\mathbb{R}_n[X] \,\middle|\, \sum_{k=0}^{n}P(a_k)=0\right\}.$$
3. Déterminer une base orthonormée de $\mathbb{R}_n[X]$.

Exercice 29 : Déterminer le nombre $\displaystyle\inf_{(a,b)\in\mathbb{R}^2}\int_0^1 (t^2-at-b)^2\,\mathrm{d}t$.

Exercice 30 : Soit E un espace préhilbertien. Soit $p\in\mathscr{L}(E)$ un projecteur tel que

$$\forall x\in E,\quad (p(x)\mid x)\geqslant 0.$$

Montrer que p est un projecteur orthogonal.

Exercice 31 - Déterminant de Gram : Soit E un espace préhilbertien réel. Pour toute famille $(u_1,\dots,u_p)$ de vecteurs de E, on note $G(u_1,\dots,u_p)$ le déterminant de la matrice de $\mathscr{M}_p(\mathbb{R})$ dont le coefficient d'indice (i,j) est $(u_i\mid u_j)$.

1. Montrer que la famille $(u_1,\dots,u_p)$ est liée si et seulement si $G(u_1,\dots,u_p)=0$.
2. Montrer que si $(e_1,\dots,e_p)$ est une base d'un sous-espace vectoriel F de E alors pour tout $x\in E$,
$$G(e_1,\dots,e_p)\cdot d(x,F)^2=G(e_1,\dots,e_p,x).$$
3. Montrer que
$$G(e_1,\dots,e_p)\leqslant\|e_1\|^2\dots\|e_p\|^2.$$