Mathématiques

PT

Lycée Couffignal

CHAPITRE 11

Espaces préhilbertiens réels

Plan du chapitre

Introduction

Un espace préhilbertien réel est un espace vectoriel réel dans lequel on dispose d'une opération algébrique supplémentaire permettant d'associer un nombre réel à chaque couple de vecteurs : un produit scalaire. Cette nouvelle application permet d'étendre les notions traditionnelles de géométrie euclidienne du plan et de l'espace à un espace vectoriel réel quelconque : les longueurs, les angles, l'orthogonalité et la projection orthogonale. Le préfixe « pré » dans le mot « préhilbertien » fait référence à l'absence d'une hypothèse particulière : la complétude. Lorsque cette hypothèse supplémentaire est vérifiée, l'espace porte le nom d'espace hilbertien ou d'espace de Hilbert en référence au mathématicien allemand David Hilbert.

Bien que la géométrie euclidienne remonte à l'antiquité, les produits scalaires n'apparaissent qu'au XIX$^{\text{e}}$ siècle au fur et à mesure qu'émerge et se formalise la notion générale d'espace vectoriel. L'attribution de sa paternité n'est pas évidente, mais on peut citer les mathématiciens Grassmann, Peano et Clifford.

Au début du XX$^{\text{e}}$ siècle, les mathématiciens Hilbert, Schmidt, Riesz et Fréchet commencent à s'intéresser à certains espaces préhilbertiens de dimension infinie dont les éléments sont des fonctions afin d'étudier des équations intégrales : c'est la naissance de l'analyse fonctionnelle. Cette dernière est omniprésente de nos jours dans de nombreux problèmes issus de la physique.

Les espaces préhilbertiens interviennent dans de nombreux domaines de la physique. Ils sont par exemple au cœur de la théorie de la mécanique quantique. D'autre part, ils permettent d'introduire de nombreux outils pour étudier les équations aux dérivées partielles qui sont omniprésentes dans les problèmes de la physique. En mathématiques, la généralisation des notions de produit scalaire et de projection orthogonale nous permettra de construire la théorie des séries de Fourier dans un futur chapitre.

Dans ce chapitre, nous commencerons par définir la notion générale de produit scalaire sur un espace vectoriel réel. Dans un second temps, nous étudierons l'orthogonalité dans ce nouveau cadre, puis finalement nous généraliserons la notion de projection orthogonale avec ses propriétés classiques.

Dans tout le chapitre, on fixe un espace vectoriel E sur $\mathbb{R}$.

Partie I Généralités

I.A - Produit scalaire

Définition (Produit scalaire) : Une application $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ est un produit scalaire si elle vérifie les conditions suivantes.

(i) Linéaire à gauche : pour tout $y \in E$, l'application $x \mapsto \varphi(x,y)$ est linéaire,

(ii) Linéaire à droite : pour tout $x \in E$, l'application $y \mapsto \varphi(x,y)$ est linéaire,

(iii) Symétrique : pour tout $(x,y) \in E^2$, on a $\varphi(x,y) = \varphi(y,x)$,

(iv) Positive : pour tout $x \in E$, on a $\varphi(x,x) \geqslant 0$,

(v) Définie : si $x \in E$ vérifie $\varphi(x,x) = 0$, alors $x = 0_E$.

Remarque 1 : Si la condition (iii) est vérifiée, alors les conditions (i) et (ii) sont équivalentes.

Notation : Une fois que l'on a choisit un produit scalaire φ sur l'espace vectoriel E, on désigne le produit scalaire de deux vecteurs $x \in E$ et $y \in E$ par $(x \mid y)$, $\langle x \mid y \rangle$ ou $x \cdot y$.

Remarque 2 : On peut munir un espace vectoriel réel de plusieurs produits scalaires. Les notions que nous allons voir dans la suite de ce chapitre dépendent entièrement du produit scalaire choisi.

Exemples 1 :

a) Le produit scalaire euclidien canonique sur $E = \mathbb{R}^n$ est défini par

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \quad \varphi(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

b) Si $E = \mathscr{C}^0([a, b], \mathbb{R})$ avec $a < b$, l'application $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall (f, g) \in \mathscr{C}^0([a, b], \mathbb{R})^2, \quad \varphi(f, g) = \int_a^b f(t)g(t)\,\mathrm{d}t$$

est un produit scalaire sur $\mathscr{C}^0([a, b], \mathbb{R})$.

c) Si $E = \mathbb{R}[X]$, l'application $\varphi : E \times E \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall (P, Q) \in \mathbb{R}[X]^2, \quad \varphi(P, Q) = \int_0^{+\infty} P(t)Q(t)\mathrm{e}^{-t}\,\mathrm{d}t$$

est un produit scalaire sur $\mathbb{R}[X]$.

Remarque 3 : Si on identifie les éléments de $\mathbb{R}^n$ aux matrices colonnes de $\mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$, alors le produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^n$ s'écrit sous la forme

$$\forall (X, Y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \quad (X \mid Y) = X^\top Y.$$

Définition (Espace préhilbertien réel) : Un espace préhilbertien réel est un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire.

Définition (Espace euclidien) : Un espace euclidien est un espace vectoriel réel de dimension finie muni d'un produit scalaire.

I.B - Norme associée à un produit scalaire

Dans cette sous-partie, on considère un espace préhilbertien E.

Définition (Norme associée à un produit scalaire) : La norme associée au produit scalaire de l'espace préhilbertien E est l'application $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall x \in E, \quad \|x\| = \sqrt{(x \mid x)}.$$

Exemple 2 : La norme associée au produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$ est

$$\forall x \in \mathbb{R}^n, \quad \|x\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_n^2}.$$

Proposition 1 : La norme $\|\cdot\| : E \to \mathbb{R}$ vérifie les propriétés suivantes.

(i) Positivité : pour tout $x \in E$, on a $\|x\| \geqslant 0$,

(ii) Séparation : pour tout $x \in E$, on a $\|x\| = 0$ si et seulement si $x = 0_E$,

(iii) Homogénéité : pour tout $x \in E$ et tout $\lambda \in \mathbb{R}$, on a $\|\lambda x\| = |\lambda| \times \|x\|$.

Proposition 2 : Pour tout $(x, y) \in E^2$, on a les relations

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2(x \mid y) + \|y\|^2 \qquad \text{et} \qquad \|x-y\|^2 = \|x\|^2 - 2(x \mid y) + \|y\|^2.$$

Remarque 4 : On en déduit l'identité de polarisation :

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad (x \mid y) = \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right).$$

Proposition (Inégalité de Cauchy-Schwarz) : Pour tout $(x, y) \in E^2$, on a l'inégalité

$$|(x \mid y)| \leqslant \|x\| \|y\|.$$

De plus, on a égalité si et seulement si les vecteurs x et y sont colinéaires.

Proposition (Inégalité triangulaire) : Pour tout $(x, y) \in E^2$, on a l'inégalité

$$\|x+y\| \leqslant \|x\| + \|y\|.$$

De plus, on a égalité si et seulement si $x = 0$ ou s'il existe $\lambda \geqslant 0$ tel que $y = \lambda x$.

Définition (Distance associée à un produit scalaire) : La distance associée à un produit scalaire sur E est l'application $d : E \times E \to \mathbb{R}$ définie par

$$\forall (x, y) \in E^2, \quad d(x, y) = \|x - y\|.$$

Partie II Orthogonalité

Dans cette partie, on considère un espace préhilbertien E.

II.A - Vecteurs et sous-espaces orthogonaux

Définition (Vecteurs orthogonaux) : Deux vecteurs $x \in E$ et $y \in E$ sont dits orthogonaux si $(x \mid y) = 0$.

Exemples 3 : On reprend les espaces préhilbertiens de l'exemple 1.

a) Les vecteurs $(1, -1, 0, \dots, 0)$ et $(1, 1, 0, \dots, 0)$ sont orthogonaux.

b) Les fonctions $t \mapsto 1$ et $t \mapsto t - 1/2$ sont orthogonales.

c) Les polynômes X et $X - 2$ sont orthogonaux.

Théorème de Pythagore : Deux vecteurs $x \in E$ et $y \in E$ sont orthogonaux si et seulement si

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Définition (Sous-espaces orthogonaux) : Deux sous-espaces vectoriels F et G de E sont dits orthogonaux si tous les vecteurs de F sont orthogonaux à tous les vecteurs de G, i.e.

$$\forall (x, y) \in F \times G, \quad (x \mid y) = 0.$$

Exemple 4 : Si on munit l'espace vectoriel $E = \mathscr{M}_n(\mathbb{R})$ du produit scalaire $(A, B) \mapsto \operatorname{tr}\left(A^\top B\right)$, alors les sous-espaces vectoriels $\mathscr{S}_n(\mathbb{R})$ et $\mathscr{A}_n(\mathbb{R})$ sont orthogonaux.

Définition (Orthogonal d'un sous-espace vectoriel) : Soit F un sous-espace vectoriel de E. L'orthogonal de F est l'ensemble des vecteurs de E orthogonaux à tous les vecteurs de F, i.e.

$$F^\perp = \left\{x \in E \mid \forall y \in F,\ (x \mid y) = 0\right\}.$$

Proposition 3 : Soit F un sous-espace vectoriel de E.

(i) L'ensemble $F^\perp$ est un sous-espace vectoriel de E.

(ii) Si $(v_1, \dots, v_p)$ est une base de F, alors $F^\perp = \left\{x \in E \mid \forall k \in [\![1, p]\!],\ (x \mid v_k) = 0\right\}$.

Exemple 5 : Dans $E = \mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire euclidien canonique, l'orthogonal de

$$H = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x + y + z = 0\}$$

est la droite $H^\perp = \operatorname{Vect}\big((1, 1, 1)\big)$.

Théorème 1 : Si E est un espace euclidien et si F est un sous-espace vectoriel de E, alors

$$\dim(E) = \dim(F) + \dim\left(F^\perp\right).$$

Exemple 6 : Dans l'exemple précédent, on a $\dim(H) = 2$, donc $\dim\left(H^\perp\right) = 1$.

II.B - Familles orthogonales et orthonormées

Définition (Famille orthogonale) : Une famille $(u_i)_{i\in I}$ de vecteurs de E est dite orthogonale si ses vecteurs sont orthogonaux deux à deux, i.e.

$$\forall (i,j)\in I^2 \text{ avec } i\neq j, \quad (u_i \mid u_j) = 0.$$

Définition (Famille orthonormée) : Une famille $(u_i)_{i\in I}$ de vecteurs de E est dite orthonormée (ou orthonormale) si elle est orthogonale et que $\|u_i\| = 1$ pour tout indice $i \in I$.

Exemple 7 : La base canonique de $\mathbb{R}^n$ est une base orthonormée pour le produit scalaire canonique sur $\mathbb{R}^n$.

Proposition 4 : Toute famille orthogonale (finie) de vecteurs non nuls est libre.

Théorème 2 : Si E est un espace euclidien dont $\mathscr{B} = (e_1,\dots,e_n)$ est une base orthonormée, alors on a

$$\forall x\in E, \quad x = \sum_{k=1}^{n} (x \mid e_k) e_k.$$

Remarque 5 : Autrement dit, les coordonnées du vecteur x dans la base $(e_1,\dots,e_n)$ sont $(x\mid e_1),\dots,(x\mid e_n)$.

Théorème 3 : On suppose que E est un espace euclidien dont $\mathscr{B} = (e_1,\dots,e_n)$ est une base orthonormée. Pour tout couple de vecteurs $(x,y)\in E^2$, si on note

$$X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R}) \qquad \text{et} \qquad Y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathscr{M}_{n,1}(\mathbb{R})$$

les coordonnées respectives des vecteurs x et y dans la base $\mathscr{B}$, alors on a

$$(x\mid y) = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k = \sum_{k=1}^{n} (x\mid e_k)(y\mid e_k) = X^\top Y \quad \text{et} \quad \|x\|^2 = \sum_{k=1}^{n} x_k^2 = \sum_{k=1}^{n} (x\mid e_k)^2 = X^\top X.$$

Remarque 6 : Autrement dit, une fois que l'on a choisi une base orthonormée d'un espace euclidien E, on est ramené à travailler dans l'espace euclidien $\mathbb{R}^n$ muni du produit scalaire canonique.

II.C - Algorithme d'orthonormalisation de Gram-Schmidt

Théorème de Gram-Schmidt : Soit $(v_1,\dots,v_p)$ une famille libre de vecteurs de E. Il existe une unique famille orthonormale $(e_1,\dots,e_p)$ vérifiant

$$\forall k\in [\![1,p]\!], \quad \mathrm{Vect}(v_1,\dots,v_k) = \mathrm{Vect}(e_1,\dots,e_k) \quad \text{et} \quad (e_k\mid v_k) > 0.$$

Remarque 7 : La démonstration du théorème ci-dessus est basée sur l'algorithme de Gram-Schmidt qui est détaillé dans la dernière partie.

Corollaire 1 : Si E est un espace euclidien, alors il existe une base orthonormée de E.

Partie III Projection orthogonale

Dans cette partie, on considère un espace préhilbertien E.

III.A - Projection orthogonale sur un sous-espace vectoriel

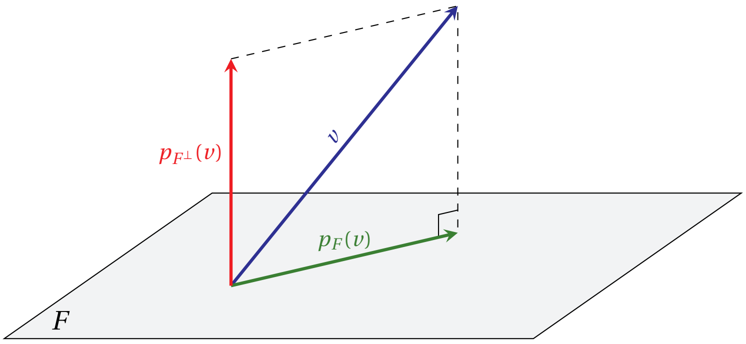
Proposition 5 : Si F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E, alors on a la décomposition $E = F \oplus F^\perp$.

ATTENTION : L'hypothèse de dimension finie est importante : on n'a pas $E = F + F^\perp$ en général.

Remarque 8 : On en déduit que si H est un hyperplan d'un espace euclidien E, alors le sous-espace $H^\perp$ est une droite vectorielle. Tout élément non nul $a \in H^\perp$ est appelé un vecteur normal à H.

Définition (Projection orthogonale) : Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E. La projection orthogonale sur F est le projecteur $p_F : E \to E$ sur F parallèlement à $F^\perp$.

Illustration : La figure suivante représente géométriquement le projeté orthogonal d'un vecteur $v \in E$ sur F.



Remarques 9 :

a) On a la relation $p_F + p_{F^\perp} = \mathrm{Id}_E$.

b) Le projeté orthogonal d'un vecteur $v \in E$ sur F est l'unique vecteur $f \in F$ tel que $v - f \in F^\perp$.

Exemple 8 : On considère l'espace vectoriel $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique. Déterminons la projection orthogonale d'un vecteur $v \in \mathbb{R}^3$ sur le sous-espace vectoriel

$$H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z=0\}.$$

Par définition, la projection orthogonale du vecteur v sur H est caractérisée par les deux conditions

$$p_H(v) \in H \quad \text{et} \quad v - p_H(v) \in H^\perp.$$

En notant $v = (x,y,z)$ et $(a,b,c) = p_H(v)$ et en remarquant que $H = \mathrm{Vect}(h_1,h_2)$ avec $h_1 = (1,-1,0)$ et $h_2 = (1,0,-1)$, les deux conditions précédentes sont équivalentes au système linéaire

$$\left\{\begin{array}{c} p_H(v) \in H \\ (v - p_H(v) \mid h_1) = 0 \\ (v - p_H(v) \mid h_2) = 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} a+b+c & = & 0 \\ (x-a)-(y-b) & = & 0 \\ (x-a)-(z-c) & = & 0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{rcl} a & = & \dfrac{2x-y-z}{3} \\ b & = & \dfrac{-x+2y-z}{3} \\ c & = & \dfrac{-x-y+2z}{3}. \end{array}\right.$$

On conclut que le projeté orthogonal de $v = (x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ sur H est

$$p_H(x,y,z) = \left(\frac{2x-y-z}{3}, \frac{-x+2y-z}{3}, \frac{-x-y+2z}{3}\right).$$

Proposition (Expression du projeté orthogonal dans une base orthonormée) : Soit F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E. Si $(e_1,\dots,e_p)$ est une base orthonormée de F, alors

$$\forall v\in E,\quad p_F(v)=\sum_{i=1}^{p}(v\mid e_i)e_i.$$

Exemple 9 : En reprenant l'exemple précédent, on obtient avec l'algorithme de Gram-Schmidt appliqué à (h_1,h_2) qu'une base orthonormée du sous-espace vectoriel H de $\mathbb{R}^3$ est (e_1,e_2) avec

$$e_1=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}\quad\text{et}\quad e_2=\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}.$$

On en déduit avec la proposition précédente que pour tout $v=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, on a

$$p_H(v)=(v\mid e_1)e_1+(v\mid e_2)e_2=\frac{x-y}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}+\frac{x+y-2z}{6}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2x-y-z\\-x+2y-z\\-x-y+2z\end{pmatrix}.$$

Remarque 10 : Si on a $\dim\left(F^\perp\right)<\dim(F)$ et que l'on dispose d'une base du sous-espace vectoriel $F^\perp$, alors il est plus rapide de calculer le projecteur $p_{F^\perp}$ avec la formule précédente, puis d'en déduire le projecteur p_F avec la relation $p_F=\mathrm{Id}_E-p_{F^\perp}$.

Exemple 10 : En reprenant l'exemple précédent, on obtient directement qu'une base orthonormée de la droite vectorielle $D=H^\perp=\mathrm{Vect}\big((1,1,1)\big)$ est le vecteur e avec

$$e=\frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}.$$

On en déduit avec la proposition précédente que pour tout vecteur $v=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, on a

$$p_D(v)=(v\mid e)e=\frac{x+y+z}{3}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}x+y+z\\x+y+z\\x+y+z\end{pmatrix}.$$

On conclut que pour tout vecteur $v=(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, on a

$$p_H(v)=v-p_D(v)=\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}x+y+z\\x+y+z\\x+y+z\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}2x-y-z\\-x+2y-z\\-x-y+2z\end{pmatrix}.$$

Remarque 11 : Si a est un vecteur normal d'un hyperplan H dans un espace euclidien E, alors le projecteur orthogonal sur H est donné par

$$\forall v\in E,\quad p_H(v)=v-\frac{(v\mid a)}{\|a\|^2}a.$$

III.B - Distance d'un vecteur à un sous-espace vectoriel

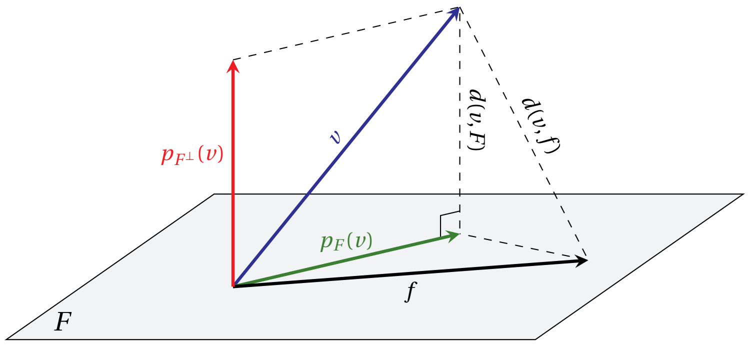
Définition (Distance d'un vecteur à un sous-espace vectoriel) : La distance d'un vecteur $v \in E$ à un sous espace vectoriel F de E est le nombre

$$d(v,F) = \inf_{f\in F} \|v - f\| = \inf_{f\in F} d(v,f).$$

Théorème 4 : Soit $v \in E$. Si F un sous-espace vectoriel de dimension finie de E, alors

$$d(v,F) = \left\| v - p_F(v) \right\| = \left\| p_{F^\perp}(v) \right\|.$$

Illustration : On peut représenter géométriquement le théorème sur la figure suivante.



Exemple 11 : On souhaite calculer la distance du vecteur $(1,0,0)$ au sous-espace vectoriel

$$H = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x+y+z = 0\}$$

de $\mathbb{R}^3$ muni du produit scalaire canonique. En reprenant l'expression du projecteur calculé précédemment, on a

$$d((1,0,0),H) = \left\|(1,0,0) - p_H(1,0,0)\right\| = \left\|(1,0,0) - \left(\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}\right)\right\| = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

Remarque 12 : Si a est un vecteur normal d'un hyperplan H dans un espace euclidien E, alors la distance de H à un vecteur $v \in E$ est

$$d(v,H) = \frac{|(v \mid a)|}{\|a\|}.$$

On retrouve la formule connue dans le cas des espaces euclidiens $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.

Partie IV Méthode - L'algorithme de Gram-Schmidt

On considère une famille libre $(v_1,\dots,v_p)$ d'un espace préhilbertien E. Dans cette partie, on présente l'algorithme de Gram-Schmidt qui permet de construire la famille orthonormée $(e_1,\dots,e_p)$ du théorème de Gram-Schmidt à partir de la famille libre $(v_1,\dots,v_p)$.

On commence par construire une famille orthogonale $(u_1,\dots,u_p)$ de E vérifiant les conditions du théorème.

1) On pose $u_1 = v_1$.
2) On cherche le vecteur u_2 sous la forme
$$u_2 = v_2 + a u_1 \quad \text{avec} \quad a \in \mathbb{R}.$$
On souhaite que u_2 et u_1 soit orthogonaux, i.e.
$$(u_2 \mid u_1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (v_2 \mid u_1) + a(u_1 \mid u_1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = -\frac{(v_2 \mid u_1)}{(u_1 \mid u_1)},$$
ce qui permet de calculer u_2.
3) On itère le procédé : si on a construit $(u_1,\dots,u_{k-1})$, on cherche le vecteur u_k sous la forme
$$u_k = v_k + \lambda_1 u_1 + \cdots + \lambda_{k-1} u_{k-1} \quad \text{avec} \quad \lambda_1,\dots,\lambda_{k-1} \in \mathbb{R}.$$
Pour chaque indice $i \in [\![1,k-1]\!]$, on souhaite que le vecteur u_k soit orthogonale à u_i, i.e.
$$(u_k \mid u_i) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (v_k \mid u_i) + \lambda_i (u_i \mid u_i) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_i = -\frac{(v_k \mid u_i)}{(u_i \mid u_i)},$$
ce qui permet de calculer u_k.
4) A la fin du procédé, on a construit une famille orthogonale $(u_1,\dots,u_p)$ de vecteurs non nuls vérifiant les conditions du théorème de Gram-Schmidt. On en déduit la famille orthonormée $(e_1,\dots,e_p)$ cherchée en normalisant les vecteurs u_i
$$\forall i \in [\![1,p]\!], \quad e_i = \frac{u_i}{\|u_i\|}.$$

Exemple 12 : On cherche une base orthonormée de l'espace vectoriel
$$H = \mathrm{Vect}(v_1, v_2) \quad \text{où} \quad v_1 = (1,0,1) \text{ et } v_2 = (1,1,0)$$
muni de la restriction du produit scalaire canonique de $\mathbb{R}^3$. On applique l'algorithme de Gram-Schmidt en partant de la base (v_1, v_2) de H.

1) On pose $u_1 = v_1 = (1,0,1)$.
2) On cherche le vecteur u_2 sous la forme
$$u_2 = v_2 + a u_1 \quad \text{avec} \quad a \in \mathbb{R}.$$
On souhaite que u_2 et u_1 soit orthogonaux, i.e.
$$(u_2 \mid u_1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (v_2 \mid u_1) + a(u_1 \mid u_1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = -\frac{(v_2 \mid u_1)}{(u_1 \mid u_1)} = -\frac{1}{2}.$$
On en déduit que
$$u_2 = v_2 - \frac{1}{2} u_1 = \left(\frac{1}{2}, 1, -\frac{1}{2}\right).$$
3) La famille (u_1, u_2) est une base orthogonale de H et on en déduit une base orthonormée (e_1, e_2) de H avec
$$e_1 = \frac{u_1}{\|u_1\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \qquad e_2 = \frac{u_2}{\|u_2\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{2}{\sqrt{6}}, -\frac{1}{\sqrt{6}}\right).$$

Exemple 13 : On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}_2[X]$ muni du produit scalaire

$$(P,Q) \mapsto (P \mid Q) = \int_{-1}^{1} P(t)Q(t)\,\mathrm{d}t.$$

Nous allons construire une base orthonormée de $\mathbb{R}_2[X]$ en appliquant l'algorithme de Gram-Schmidt en partant de la base $(V_0, V_1, V_2) = (1, X, X^2)$.

1) On pose $U_0 = V_0 = 1$.
2) On cherche le polynôme U_1 sous la forme

$$U_1 = V_1 + aU_0 \quad \text{avec} \quad a \in \mathbb{R}.$$

On souhaite que U_0 et U_1 soit orthogonaux, i.e.

$$(U_1 \mid U_0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (V_1 \mid U_0) + a(U_0 \mid U_0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad a = -\frac{(V_1 \mid U_0)}{(U_0 \mid U_0)} = 0.$$

On en déduit que $U_1 = X$.

3) On cherche le polynôme U_2 sous la forme

$$U_2 = V_2 + bU_1 + cU_0 \quad \text{avec} \quad b, c \in \mathbb{R}.$$

On souhaite que U_2 soit orthogonal à U_0 et U_1, donc

$$(U_2 \mid U_0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (V_2 \mid U_0) + c(U_0 \mid U_0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad c = -\frac{(V_2 \mid U_0)}{(U_0 \mid U_0)} = -\frac{1}{3}.$$

$$(U_2 \mid U_1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad (V_2 \mid U_1) + b(U_1 \mid U_1) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad b = -\frac{(V_2 \mid U_1)}{(U_1 \mid U_1)} = 0.$$

On en déduit que $U_2 = X^2 - 1/3$.

4) La famille (U_0, U_1, U_2) est une base orthogonale de $\mathbb{R}_2[X]$ et on en déduit une base orthonormée (E_0, E_1, E_2) de l'espace euclidien $\mathbb{R}_2[X]$ avec

$$E_0 = \frac{U_0}{\|U_0\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \qquad E_1 = \frac{U_1}{\|U_1\|} = \sqrt{\frac{3}{2}}X, \qquad E_2 = \frac{U_2}{\|U_2\|} = \frac{\sqrt{5}}{2\sqrt{2}}\left(3X^2 - 1\right).$$