

TD 16

Équations différentielles
linéaires du second ordre

Partie I Révisions - Équations différentielles d'ordre 1

Exercice 1 : Résoudre les équations différentielles suivantes sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
 (i) \quad y' + y &= 2\sin(t), & (ii) \quad y' + 2y &= t^2 - 2t + 3, \\
 (iii) \quad (1 + e^t)y' + e^t y &= 1 + e^t, & (iv) \quad (t^2 + 1)y' - ty &= (t^2 + 1)^{3/2}.
 \end{aligned}$$

Exercice 2 : Résoudre les équations différentielles suivantes sur $\mathbb{R}$.

$$(i) \quad ty' - 2y = t^3, \quad (ii) \quad t^2 y' - y = 0, \quad (iii) \quad ty' + y = 1.$$

Exercice 3 : Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continues vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \int_0^x t f(t) dt + 1.$$

Exercice 4 : Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) + f(x) + \int_0^1 f(t) dt = 0.$$

Exercice 5 : Soit $f : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^1$ telle que

$$f(0) = 0 \quad \text{et} \quad \forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) \geq f(x).$$

Montrer que $f(x) \geq 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}_+$.

Partie II Révisions - Équations différentielles d'ordre 2

Exercice 6 : Résoudre les équations différentielles suivantes sur $\mathbb{R}$.

$$\begin{aligned}
 (i) \quad y'' - 4y' + 3y &= e^t, & (ii) \quad y'' + 9y &= t + 1, \\
 (iii) \quad y'' - 2y' + y &= t + 2e^t, & (iv) \quad y'' + 2y' + 2y &= \sin(t), \\
 (v) \quad y'' - 3y' + 2y &= \sin(2t), & (vi) \quad y'' - 2y' + 2y &= e^t \cos(t).
 \end{aligned}$$

Exercice 7 : On considère sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$(1 + e^t)y'' + 2e^t y' + (2e^t + 1)y = e^t. \quad (E)$$

1. Soit y une solution de (E) . Déterminer une équation différentielle linéaire d'ordre 2 vérifiée par la fonction $z(t) = (1 + e^t)y(t)$.
2. En déduire les solutions de (E) .

Exercice 8 : On considère sur $I =]0, +\infty[$ l'équation différentielle

$$x^2 y'' - 3x y' + 4y = 0. \quad (E)$$

1. Soit y une solution de (E) . Déterminer une équation différentielle linéaire d'ordre 2 vérifiée par la fonction $z(t) = y(e^t)$.
2. En déduire les solutions de (E) sur I .

Exercice 9 : On considère sur $I =]-1, 1[$ l'équation différentielle

$$(1 - x^2)y'' - xy' + y = 0. \quad (E)$$

1. Soit y une solution de (E) . Déterminer une équation différentielle linéaire d'ordre 2 vérifiée par la fonction $z(t) = y(\sin(t))$.
2. En déduire les solutions de (E) sur I .

Exercice 10 : Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ dérivables vérifiant

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f'(x) + f(-x) = e^x.$$

Partie III Équations différentielles linéaires d'ordre 2

Exercice 11 : Soit $a > 0$. On considère sur $I =]0, +\infty[$ l'équation différentielle

$$x^2 y'' + x y' - a^2 y = 0. \quad (E)$$

1. Déterminer les solutions de (E) de la forme $y : x \mapsto x^p$ pour $p \in \mathbb{R}$.
2. En déduire les solutions de (E) sur $]0, +\infty[$.

Exercice 12 : On considère sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$(t+1)^2 y'' - 2(t+1)y' + 2y = 0. \quad (E)$$

1. Déterminer les fonctions polynomiales solutions de (E) .
2. En déduire les solutions de (E) sur les intervalles $] -\infty, -1[$ et $] -1, +\infty[$.
3. En déduire les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

Exercice 13 : On considère sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$(t^2 + 1)y'' - 2y = 0. \quad (E)$$

1. Déterminer les solutions polynomiales de (E) .
2. En déduire les solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

Exercice 14 : On considère sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$t^2 y'' + t y' - y = 1. \quad (E)$$

1. Déterminer les solutions polynomiales de l'équation homogène (H) .
2. En déduire les solutions de (E) sur les intervalles $] -\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$.
3. En déduire l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

Exercice 15 : On considère sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$(1+t^2)y'' + 4ty' + 2y = 0. \quad (E)$$

1. Déterminer les solutions développables en série entière de (E) .
2. En déduire l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

Exercice 16 : On considère sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$x(1-x)y'' + (1-3x)y' - y = 0. \quad (E)$$

1. Déterminer les solutions développables en série entière de (E) .
2. En déduire l'ensemble des solutions de (E) sur $] -\infty, 0[$, $]0, 1[$ et $]1, +\infty[$.
3. En déduire l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

Exercice 17 : On considère sur $\mathbb{R}$ l'équation différentielle

$$x^2(1-x)y'' - x(1+x)y' + y = 2x^3. \quad (E)$$

1. Déterminer les solutions développables en série entière de l'équation homogène (H) associée à (E) .
2. En déduire l'ensemble des solutions de (E) sur $] -\infty, 0[$, $]0, 1[$ et $]1, +\infty[$.
3. En déduire l'ensemble des solutions de (E) sur $\mathbb{R}$.

Exercice 18 : Déterminer les fonctions continues $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = -1 - \int_0^x (2x-t)f(t) dt.$$

Exercice 19 : Soient $p : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ et $q : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ des fonctions continues. Montrer que si $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ est une solution non nulle de l'équation différentielle

$$y'' + p(t)y' + q(t)y = 0,$$

alors elle s'annule un nombre fini de fois sur $[a, b]$.