CHAPITRE 3

Déterminants

Jérôme VON BUHREN
http://vonbuhren.free.fr

Lycée Couffignal - PT*

Les déterminants sont des outils très utiles en mathématiques : ils permettent notamment de tester simplement si une matrice est inversible ou si une famille de vecteurs est une base. De plus, nous les utiliserons pour définir une notion importante dans un futur chapitre : le polynôme caractéristique d'un endomorphisme.

L'objectif principal de ce chapitre est d'étendre la notion de déterminant vue en première année à des matrices de tailles quelconques. Nous généraliserons les propriétés déjà vues et nous en démontrerons de nouvelles afin de calculer efficacement le déterminant. Finalement, nous introduirons le déterminant d'un endomorphisme d'un espace vectoriel de dimension finie.

Dans tout le chapitre, on fixe un entier $n \in \mathbb{N}^*$ et on désigne par $\mathbb{K}$ le corps $\mathbb{R}$ ou le corps $\mathbb{C}$.

Théorème d'existence et d'unicité du déterminant

Il existe une unique application $\det : \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$, appelée déterminant, vérifiant les propriétés suivantes.

(i) Le déterminant est linéaire par rapport à chacune des colonnes.

(ii) L'échange de deux colonnes multiplie le déterminant par (-1).

(iii) Le déterminant de la matrice identité I_n est 1.

Démonstration

Admise

Remarque 1

Lorsque $n = 2$ ou $n = 3$, on retrouve le déterminant vu en première année.

Notation

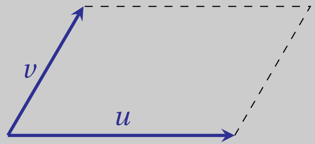
Le déterminant d'une matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ est noté

$$\det(A) = \det\left(\begin{pmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix}\right) = \begin{vmatrix} a_{1,1} & \cdots & a_{1,n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n,1} & \cdots & a_{n,n} \end{vmatrix}.$$

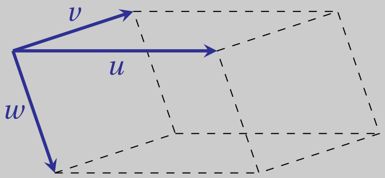
Remarques 2

a) Si $n = 2$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, le déterminant de la matrice dont on note les colonnes (u, v) est l'aire algébrique du parallélogramme construit sur u et v.

b) Si $n = 3$ et $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, le déterminant de la matrice dont on note les colonnes (u, v, w) est le volume algébrique du parallélépipède construit sur u, v et w.



Parallélogramme construit sur u et v



Parallélépipède construit sur u, v et w

Proposition 1

On a les propriétés suivantes.

(i) Si une matrice a une colonne nulle, alors son déterminant est nul.

(ii) Si une matrice a deux colonnes égales, alors son déterminant est nul.

Théorème 1

On a les propriétés suivantes.

(i) On ne change pas le déterminant d'une matrice si on ajoute à une colonne une combinaison linéaire des autres colonnes.

(ii) Le déterminant d'une matrice triangulaire est le produit de ses coefficients diagonaux.

Remarque 3

On déduit du théorème précédent une méthode pour pour calculer le déterminant d'une matrice explicite. Il suffit d'appliquer l'algorithme du pivot de Gauss pour se ramener à une matrice triangulaire.

Exemple 1

On calcule un déterminant en échelonnant la matrice sur les colonnes.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} \underset{\substack{C_3 \leftarrow C_3 - C_1 \\ C_4 \leftarrow C_4 - C_1}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \underset{\substack{C_3 \leftarrow C_3 + C_2 \\ C_4 \leftarrow C_4 + C_2}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$\underset{C_4 \leftarrow C_4 - \frac{2}{3} C_3}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1/3 \end{vmatrix} = 1 \times 1 \times 3 \times \frac{1}{3} = 1.$$

Proposition 2

Pour toute matrice $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ et tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on a $\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A)$.

Théorème 2

Pour toute matrice $(A, B) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})^2$, on a $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.

DÉMONSTRATION

ADMISE

Corollaire 1

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$. La matrice A est inversible dans $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ si et seulement si $\det(A) \neq 0$. Dans ce cas, on a la relation $\det\left(A^{-1}\right) = \det(A)^{-1}$.

Remarque 4

Le déterminant d'une matrice carrée est nul si et seulement si la famille de ses colonnes est liée.

Théorème 3

Pour toute matrice $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, on a $\det(A) = \det\left(A^\top\right)$.

Démonstration

Admise

Corollaire 2

Les propriétés du déterminant sur les colonnes sont aussi valables sur les lignes.

On suppose dans cette partie que $n \geqslant 2$. Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $(i,j) \in [\![1,n]\!]^2$, on note $A_{i,j} \in \mathscr{M}_{n-1}(\mathbb{K})$ la matrice obtenue en retirant la i-ème ligne et la j-ème colonne à la matrice A.

Formules de Laplace

Soit $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

(i) Pour tout indice $j \in [\![1,n]\!]$, on a

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \det(A_{i,j}).$$

(ii) Pour tout indice $i \in [\![1,n]\!]$, on a

$$\det(A) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \det(A_{i,j}).$$

DÉMONSTRATION (NON EXIGIBLE)

On se limite à donner le cheminement de la démonstration. On définit l'application $\varphi : \mathscr{M}_n(\mathbb{K}) \to \mathbb{K}$ par

$$\forall A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K}), \quad \varphi(A) = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{i,j} \det(A_{i,j}).$$

On montre que cette application vérifie les trois points du théorème d'existence et d'unicité du déterminant, donc on a l'égalité $\varphi = \det$, ce qui prouve la formule du premier point. La démonstration est analogue pour le second point.

Exemples 2

a) En développement par rapport à la première colonne, on a

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 1 \times \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} - 2 \times \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 3 \times \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 1 \times (-2) - 2 \times 1 + 3 \times 3 = 5.$$

b) En développement par rapport à la deuxième ligne, on a

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -2 \times \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + 1 \times \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} - 2 \times \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -2 \times 1 + 1 \times 3 - 2 \times (-2) = 5.$$

Remarque 5

Le signe du $(-1)^{i+j}$ dans la formule peut se retenir avec la matrice suivante.

$$\begin{pmatrix} + & - & + & \cdots & \pm \\ - & + & - & \ddots & \vdots \\ + & - & \ddots & \ddots & + \\ \vdots & \ddots & \ddots & + & - \\ \pm & \cdots & + & - & + \end{pmatrix}$$

Dans cette partie, on considère un espace vectoriel E sur $\mathbb{K}$ de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Définition (Déterminant d'une famille de vecteurs dans une base)

Soit $\mathscr{B}$ une base de E. Le déterminant dans la base $\mathscr{B}$ d'une famille de vecteurs $(v_1, \ldots, v_n)$ de E, noté $\det_{\mathscr{B}}(v_1, \ldots, v_n)$, est le déterminant de la matrice $\operatorname{Mat}_{\mathscr{B}}(v_1, \ldots, v_n) \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

Exemple 3

On considère l'espace vectoriel $E = \mathbb{R}_2[X]$, la base $\mathscr{B} = (1, X, X^2)$ de E et la famille (P_0, P_1, P_2) avec

$$P_0 = X^2 + 1, \quad P_1 = X^2 + X + 1, \quad P_2 = X^2 - 1.$$

La matrice de cette famille dans la base $\mathscr{B}$ est

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(P_0, P_1, P_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que le déterminant de cette famille dans la base $\mathscr{B}$ est

$$\det_{\mathscr{B}}(P_0, P_1, P_2) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2.$$

Théorème 4

Soit $\mathscr{B}$ une base de E. Une famille $(v_1, \ldots, v_n)$ de vecteurs de E est une base de E si et seulement si $\det_{\mathscr{B}}(v_1, \ldots, v_n) \neq 0$.

Exemple 4

La famille (P_0, P_1, P_2) de l'exemple précédent est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

Dans cette partie, on considère un espace vectoriel E sur $\mathbb{K}$ de dimension finie $n \in \mathbb{N}^*$.

Rappelons que deux matrices $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et $B \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ sont dites semblables s’il existe une matrice $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ telle que $B = PAP^{-1}$.

Lemme 1

Si deux matrices de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ sont semblables, alors elles ont le même déterminant.

Définition (Déterminant d'un endomorphisme)

Soit $f \in \mathscr{L}(E)$ un endomorphisme d'un espace vectoriel E de dimension finie. Le déterminant de f, notée $\det(f)$, est le déterminant de la matrice représentant f dans une base $\mathscr{B}$ de E.

Remarque 6

D'après le lemme précédent, le nombre $\det(f)$ ne dépend pas de la base $\mathscr{B}$ que l'on utilise pour faire le calcul. En effet, si $\mathscr{B}'$ est une autre base de E, on a avec la formule du changement de base

$$\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f) = P_{\mathscr{B}' \to \mathscr{B}} \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \times P_{\mathscr{B} \to \mathscr{B}'} = P_{\mathscr{B}' \to \mathscr{B}} \times \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) \times \left(P_{\mathscr{B}' \to \mathscr{B}}\right)^{-1},$$

donc les matrices $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f)$ et $\mathrm{Mat}_{\mathscr{B}'}(f)$ sont semblables, donc elles ont le même déterminant.

Exemple 5

On considère l'endomorphisme $f : \mathbb{R}_2[X] \to \mathbb{R}_2[X]$ défini par

$$f(P) = XP''(X) + P(X)$$

pour tout polynôme $P \in \mathbb{R}_2[X]$. Dans la base $\mathscr{B} = (1, X, X^2)$ de $\mathbb{R}_2[X]$, la matrice de f est

$$A = \mathrm{Mat}_{\mathscr{B}}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On en déduit que le déterminant de f est $\det(f) = \det(A) = 1 \times 1 \times 1 = 1$.

Théorème 5

Soit $(f,g) \in \mathscr{L}(E)^2$.

(i) On a $\det(\mathrm{Id}_E) = 1$.

(ii) Pour tout $\lambda \in \mathbb{K}$, on a $\det(\lambda f) = \lambda^{\dim(E)} \det(f)$.

(iii) On a $\det(f \circ g) = \det(f)\det(g)$.

(iv) L'application f est un automorphisme si et seulement si $\det(f) \neq 0$.
Dans ce cas, on a $\det\left(f^{-1}\right) = \det(f)^{-1}$.