TD 3 Déterminants

Partie I Déterminant d'une matrice carrée

Exercice 1 : Calculer le déterminant des matrices de $\mathcal{M}_4(\mathbb{C})$ suivantes.

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 1 & 3 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 & 6 \\ 1 & 1 & 1 & 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & i & i & 1 \\ i & 0 & 1 & -1 \\ i & i & i & 1 \\ 0 & i & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Exercice 2 : Pour $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, calculer sous forme factorisée les déterminants

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix}, \quad D = \begin{vmatrix} 1 & \cos(a) & \cos(2a) \\ 1 & \cos(b) & \cos(2b) \\ 1 & \cos(c) & \cos(2c) \end{vmatrix}.$$

Exercice 3 : Pour $(a, b, c) \in \mathbb{C}^3$, calculer sous forme factorisée le déterminant

$$D = \begin{vmatrix} a & c & c & b \\ c & a & b & c \\ c & b & a & c \\ b & c & c & a \end{vmatrix}.$$

Exercice 4 : Pour quelle valeur de $a \in \mathbb{R}$, les matrices de $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ suivantes sont-elles inversibles?

$$M_a = \begin{pmatrix} a & -1 & 0 & -1 \\ -1 & a & -1 & 0 \\ 0 & -1 & a & -1 \\ -1 & 0 & -1 & a \end{pmatrix}, \quad N_a = \begin{pmatrix} 0 & a & a & a^2 - a \\ 1 & a - 1 & 2a - 1 & a^2 - a \\ 0 & a & a & 0 \\ 1 & a & 3a - 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5 : Pour $n \in \mathbb{N}^*$, on considère le déterminant de taille $n \times n$ suivant.

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 2 & 3 & 1 & \ddots & \vdots \\ 0 & 2 & 3 & \ddots & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & 1 \\ 0 & \cdots & 0 & 2 & 3 \end{vmatrix}.$$

1. Calculer Δ_1, Δ_2 et Δ_3 .
2. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $\Delta_{n+2} = 3\Delta_{n+1} - 2\Delta_n$.
3. En déduire une expression explicite de Δ_n pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 6 : Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Pour tout $(s_1, \dots, s_n) \in \mathbb{C}^n$, calculer le déterminant de la matrice $(s_{\min(i,j)})_{1 \leq i, j \leq n}$.

Exercice 7 : Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer le déterminant de $(i - j)_{1 \leq i, j \leq n}$.

Exercice 8 : Soit $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$ une matrice antisymétrique. Montrer que si n est un entier impair, alors M n'est pas inversible.

Exercice 9 : Soient $A \in \mathcal{M}_{2n}(\mathbb{R})$ et $U = (1)_{1 \leq i, j \leq 2n}$ avec $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Montrer que l'application $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \det(A + xU)$ est affine.
2. En déduire que si A est antisymétrique, alors

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \det(A + xU) = \det(A).$$

Exercice 10 : Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{R})$. On suppose que

$$\forall j \in \llbracket 1, n \rrbracket, \quad \sum_{i=1}^n |a_{i,j}| \leq 1.$$

Montrer par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que $|\det(A)| \leq 1$.

Partie II Déterminant d'une famille de vecteurs

Exercice 11 : Déterminer les réels $t \in \mathbb{R}$ tels que la famille

$$\mathcal{F}_t = ((t, 1, 1), (1, t, 1), (1, 1, t))$$

est une base de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 12 : A quelle condition sur $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$, la famille

$$\mathcal{F}_{a,b,c} = ((X-a)^2, (X-b)^2, (X-c)^2)$$

est une base de $\mathbb{R}_2[X]$.

Exercice 13 : Soit E un espace vectoriel admettant une base (v_1, v_2, v_3, v_4) . On note $w = v_1 + v_2 + v_3 + v_4$. Pour quelle valeur de $t \in \mathbb{K}$, la famille

$$\mathcal{F}_t = (v_1 + tw, v_2 + tw, v_3 + tw, v_4 + tw)$$

est-elle une base de E ?

Exercice 14 : Soit E un espace vectoriel admettant une base $(u_1, \dots, u_n)$. On considère un élément $(\alpha_1, \dots, \alpha_n) \in \mathbb{K}^n$ et on note

$$v = \sum_{i=1}^n \alpha_i u_i.$$

Déterminer une condition nécessaire et suffisante sur l'élément $\alpha \in \mathbb{K}^n$ pour que la famille $(u_1 + v, \dots, u_n + v)$ soit libre.

Partie III Déterminant d'un endomorphisme

Exercice 15 : Calculer le déterminant de $u \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ et déterminer si u est un isomorphisme dans chacun des cas suivants.

$$(i) \ u(x, y, z) = (x + y + z, x + z, y + z), \quad (ii) \ u(x, y, z) = (x - y, y - z, z - x).$$

Exercice 16 : Soit $n \in \mathbb{N}$. Calculer le déterminant de $u \in \mathcal{L}(\mathbb{C}_n[X])$ et déterminer si u est un isomorphisme dans chacun des cas suivants.

$$(i) \ u(P) = P + P', \quad (ii) \ u(P) = P(X+1) - P(X), \quad (iii) \ u(P) = XP' + P(1).$$

Exercice 17 : Soit $A \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$. On considère l'endomorphisme $\varphi : \mathcal{M}_2(\mathbb{R}) \rightarrow \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$ défini par $\varphi(M) = AM$ pour tout $M \in \mathcal{M}_2(\mathbb{R})$.

1. Exprimer le déterminant de l'endomorphisme φ en fonction de celui de A .
2. En déduire que φ est un isomorphisme si et seulement si A est inversible.

Exercice 18 : Soit E un espace de dimension finie sur $\mathbb{R}$. Montrer que s'il existe un endomorphisme $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $f^2 = -\text{Id}_E$, alors la dimension de E est paire.

Exercice 19 : Soit E un espace de dimension finie et soit $s \in \mathcal{L}(E)$ une symétrie.

1. Écrire la matrice de s dans une base adaptée à $E = \text{Ker}(s - \text{Id}_E) \oplus \text{Ker}(s + \text{Id}_E)$.
2. Exprimer le déterminant de s en fonction de la dimension de $\text{Ker}(s + \text{Id}_E)$.

Exercice 20 : On considère un entier $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer le déterminant de l'endomorphisme $T : \mathcal{M}_n(\mathbb{K}) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$ défini par $T(M) = M^\top$ pour tout $M \in \mathcal{M}_n(\mathbb{K})$.

Exercice 21 : Soit E un espace vectoriel de dimension finie. Soit $u \in \mathcal{L}(E)$ un endomorphisme de rang 1.

1. Montrer qu'il existe une base $\mathcal{B}$ de l'espace vectoriel E tel que toutes les colonnes de la matrice $\text{Mat}_{\mathcal{B}}(u)$ sauf la dernière soient nulles.
2. En déduire que $\det(u + \text{Id}_E) = 1 + \text{tr}(u)$.